Équation d'ondes dans un milieu isotrope

Équation de Navier et Cauchy

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

équivalent du second principe de Newton pour MC

Or $\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$

$$= \lambda \sum_l \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}.$$ cas isotrope

Ce qui donne $\rho \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \right)$

Pour $i = 1$ (dans la direction x_1)

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)}_{j=1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right]}_{j=2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \right]}_{j=3}$$

On rappelle que $\theta = \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}$

et comme λ et μ sont constants

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \overbrace{\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}}^{2\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}}$$
$$+ \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}$$

donc

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}$$
$$+ \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda+\mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \underbrace{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)}_{\theta = \operatorname{div} \underline{u} = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right)$$

idem pour $i=2$ et $i=3$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda+\mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \underline{u}) + \mu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

en associant les trois composantes

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu) \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) + \mu \nabla^2 \underline{u}$$ laplacien vectoriel

or $\nabla^2 \underline{u} = \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) - \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{u})$ (voir feuille math 1)

donc on obtient $\rho \dfrac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) - \mu \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{u})$.

En divisant toute l'équation par ρ et en posant

$$\alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{et} \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

on a

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \alpha^2 \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) - \beta^2 \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{u}) \qquad (1)$$

On a déjà rencontré $\underline{\nabla} \cdot \underline{u}$ (divergence de $\underline{u}$) et on a introduit $\theta = \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \dfrac{\Delta V}{V}$ (variations de volume)

On peut également introduire $\underline{V} = \operatorname{rot} \underline{u} = \underline{\nabla} \times \underline{u}$

Dans un système cartésien, $\underline{V} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{array} \right.$ (voir cours rotationnel)

On peut aussi parfois rencontrer

$$V_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

tenseur de Levi-Civita

Et finalement l'équation (1) devient

$$\boxed{\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \alpha^2 \underline{\nabla}\theta - \beta^2 \underline{\nabla}\times\underline{V}} \qquad (2)$$

α agit sur θ → variation de volume

β agit sur $\underline{V}$ → cisaillement (changement de forme sous variation de volume).

En 1829, s'appuyant sur le théorème d'Helmholtz, Poisson montra que n'importe quel vecteur déplacement $\underline{u}$ peut se décomposer grâce à deux potentiels :

- un potentiel scalaire ϕ
- un potentiel vecteur $\underline{\Psi}$

divergence nulle

tels que $\underline{u} = \nabla\phi + \underline{\nabla}\times\underline{\Psi}$ et $\underline{\nabla}\cdot\underline{\Psi} = 0$

En appliquant cette relation à l'eq (2) on peut écrire que

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = \underline{\nabla}\cdot(\nabla\phi + \underline{\nabla}\times\underline{\Psi}) = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\phi + \underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\times\underline{\Psi}}_{=0 \text{ toujours}}$$

et $\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\phi = \nabla^2\phi$ laplacien scalaire

donc $\theta = \nabla^2\phi$

Pour le rotationnel de $\underline{u}$ $\underline{\nabla}\times\underline{u} = \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\phi + \underline{\nabla}\times\underline{\Psi})$

$$= \underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\times\underline{\Psi} \qquad \text{car } \underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\phi = 0$$

Comme $\underline{\nabla}\cdot\underline{\Psi} = 0$ on peut le rajouter et

$$\underline{\nabla}\times\underline{u} = \underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\times\underline{\Psi} - \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{\Psi}) = -\nabla^2\underline{\Psi}$$

laplacien vectoriel

donc $\underline{V} = -\nabla^2\underline{\Psi}$

Il suffit donc maintenant de reprendre l'eq (2) et de calculer $\underline{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial^2\underline{u}}{\partial t^2}\right)$ et $\underline{\nabla}\times\frac{\partial^2\underline{u}}{\partial t^2}$.

Commençons par la divergence (dilatation / compression)

$$\underline{\nabla} \cdot \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla \cdot (\underline{\nabla} \theta) - \beta^2 \underbrace{\underline{\nabla}(\underline{\nabla} \times \underline{V})}_{= \underline{0}}$$

L'ordre des dérivées n'importe pas et $\nabla \cdot \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{u}}_{\theta})$

donc (2) devient

$$\boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \theta}$$

À une dimension cela s'écrirait $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ c'est l'équation différentielle d'un ressort.

La solution est de la forme $\theta(x,t) = A \exp[i(\omega t - kx)]$

c'est une onde de dilatation/compression se propageant à la vitesse α donc $\underline{\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}}$

C'est la vitesse des ondes P.

Passons au ~~différentiel~~ rotationnel

$$(2) \rightarrow \underline{\nabla} \times \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \alpha^2 \underbrace{\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \theta)}_{= \underline{0}} - \beta^2 \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{V})$$

on obtient $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\underline{\nabla} \times \underline{u}) = -\beta^2 \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{V})$ auquel on peut rajouter le terme $\underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{V})$ car $= 0$ car $\underline{V} = \underline{\nabla} \times \underline{u}$

et $\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial t^2} = -\beta^2 \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{V}) + \beta^2 \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{V})$

et comme précédemment on obtient $\boxed{\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial t^2} = \beta^2 \underline{\nabla}^2 \underline{V}}$

C'est une équation d'ondes propageant un cisaillement $\underline{V} = \underline{\nabla} \times \underline{u}$ à la vitesse $\underline{\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}}$

C'est la vitesse des ondes S.