Nantes Université

Faculté des sciences et des techniques
https://sciences-techniques.univ-nantes.fr

XLG1ME811
Outils de calcul pour SV-SVT-STU (exercices)

Éric Paturel[1], Caroline Dumoulin[2], Antoine Mocquet[2], Houda Benhelli-Mokrani[3] et Éric Beucler[2]

Sommaire

Dernière version PDF disponible en ligne

2024-2025 - version 2.06

1. Département de Mathématiques, Nantes Université
2. Département des sciences de la Terre et de l'Univers, Nantes Université
3. Département de Biologie, Nantes Université

Chapitre I

Rappels de calcul élémentaire

1. Simplifier les expressions algébriques suivantes. On rappelle qu'une expression algébrique utilise des lettres pour représenter des nombres. Ainsi, $2a + 5a$ signifie "deux fois le nombre a plus cinq fois ce même nombre a", ce qu'on peut simplifier en "sept fois le nombre a", ou $7a$. C'est une *somme* de deux *termes*, chacun de ces termes ($2a$ et $5a$) étant le *produit* de deux *facteurs* (2 et a pour le premier, 5 et a pour le second).
   Attention, $2a + 5b$ signifie "deux fois le nombre a plus cinq fois un autre nombre appelé b". Dans ce cas, on ne peut pas simplifier plus sans connaître plus de choses sur a et b.
   Ainsi, on peut simplifier $2x^2 + 3x^2$ en $5x^2$.

   (a) $12x^2 \times 9$
   (b) $5x + 23x - 3x$
   (c) $5x + 23x - 3x^2$
   (d) $2ab + 4ba - 3c$
   (e) $(3x^4)(12x^3)$
   (f) $(-x^2y)(xy^2) - (x^3y)(-y)^2$

2. Simplifier les expressions algébriques suivantes, où des fractions interviennent

   (a) $\dfrac{6x^2}{3x^2}$
   (b) $\dfrac{9x^2}{3x^3}$
   (c) $\dfrac{6x^2 + 3x}{3x}$
   (d) $\dfrac{3(x-2)}{(x-2)^2}$
   (e) $\dfrac{3ab}{a^2b^2 - 4ab}$

3. La somme de deux nombres entiers consécutifs vaut 85. Que valent ces deux nombres ?
4. La somme de deux nombres pairs consécutifs vaut 14. Que valent ces deux nombres ?
5. Simplifier les expressions algébriques suivantes, où des fractions interviennent

   (a) $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{9}$
   (b) $\dfrac{2}{7} \times \dfrac{1}{12}$
   (c) $\dfrac{3}{x} \times \dfrac{xz}{y^2}$
   (d) $\dfrac{1}{x+2} \times \dfrac{2x+4}{x+1}$
   (e) $\frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{12}}$
   (f) $\frac{\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}$
   (g) $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{16}{x}}$
   (h) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{12}$
   (i) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{x}$
   (j) $3x + \dfrac{1}{3x}$
   (k) $m + \dfrac{n-m}{2}$.

6. Développer les expressions algébriques suivantes (on se débarrasse des parenthèses), puis simplifier.

(a) $2(3+2)$
(b) $2(3x+2)$
(c) $\frac{1}{2}(x+2y)+\frac{7}{2}(4x-y)$
(d) $3x(x+2)-7x^2$
(e) $(x+1)(x+2)$
(f) $(x+1)(x-2)$
(g) $(3x+5)(2x+1)$
(h) $-(2a+3b)(a+b)$

7. Écrire sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible

(a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$;
(b) $2-\frac{13}{7}+\left(1+\frac{5}{2}\right)$;
(c) $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+3\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right)$.

8. Factoriser les expressions algébriques suivantes : il s'agit d'identifier et regrouper des facteurs communs à différents termes d'une somme. C'est très utile pour résoudre des équations.

(a) $3x+9$
(b) $17t+34$
(c) $x+2xy+3xyz$
(d) $\frac{1}{7a^2+35ab}$
(e) $16abc-8ab^2+24bc$

9. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

(a) 3,141 592 65
(b) 299 792 458
(c) 0,000 012 566
(d) $0{,}193\ 10^{-100}$
(e) $123{,}45\ 10^{-67}$
(f) $2\times10^{-2}\times3\times10^{3}$
(g) $3{,}51\times10^{3}-2\times10^{1}$

10. Simplifier ces expressions algébriques utilisant des puissances. On rappelle que X^A se lit X à la puissance A, où A est un nombre entier ou une fraction (nombre rationnel), et X est un nombre (qui doit être positif si A n'est pas entier), avec par exemple

$$\begin{aligned}
x^2 &= x \text{ au carré} = x\times x = x \text{ à la puissance } 2\\
x^3 &= x \text{ au cube} = x\times x\times = x \text{ à la puissance } 3\\
x^0 &= 1\\
x^1 &= x\\
x^{1/2} &= \sqrt{x} = \text{racine carrée de } x\\
x^{-1} &= \tfrac{1}{x} = \text{inverse de } x\\
x^{-2} &= \tfrac{1}{x^2} = \text{inverse du carré de } x
\end{aligned}$$

Ces puissances obéissent aux trois règles de calcul suivantes :

$$\begin{aligned}
x^a x^b &= x^{a+b}\\
\tfrac{x^a}{x^b} &= x^{a-b}\\
(x^a)^b &= x^{ab}
\end{aligned}$$

(a) Évaluer 3^2, 3^{-2}, $\frac{1}{3^{-2}}$.
(b) Évaluer $(81/3)^{-1}$, $\frac{2^{-4}}{2^{-3}}$, $\frac{2^{-3}}{2^4}$.
(c) Calculer la différence entre $(-7)^2$ et -7^2.
(d) Évaluer $\frac{4x^2}{12x^3}$ lorsque $x=-2$.

Chapitre II

Fonctions affines et linéaires

II.1 Exercices d'entraînement

Une fonction *linéaire* est une relation entre deux quantités x et y *proportionnelles* : $y = ax$. Par exemple l'intensité du poids (souvent noté P) est une fonction linéaire de la masse m : $P = mg$, avec pour coefficient de proportionnalité l'accélération de la pesanteur g ; autre exemple, l'absorbance A d'une substance en solution est une fonction linéaire de la concentration C de cette substance : $A = (\epsilon\ell)C$, avec pour coefficient de proportionnalité le nombre $\epsilon\ell$, produit d'une constante (coefficient d'absorption molaire) par la longueur du trajet de la lumière dans la solution.

Une fonction *affine* est une relation entre deux quantités x et y de la forme $y = ax + b$. Bien sûr, lorsque $b = 0$, on a une fonction linéaire. Comme on le voit, b est la valeur de y lorsque $x = 0$ ("ordonnée à l'origine"). On peut aussi écrire $y = a(x + \frac{b}{a})$, les quantités y et $x + \frac{b}{a}$ sont proportionnelles.

Comme vous le savez, la représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une droite de pente a et d'ordonnée à l'origine b, et les vecteurs directeurs d'une telle droite sont les vecteurs (u, au), où u est un nombre.

Comme on le voit, ces fonctions linéaires ou affines apparaissent dans le cadre de certains *modèles* physiques, et leur validité dépend des **hypothèses** de ce modèle, comme le fait que l'accélération de la pesanteur soit constante, ou que la concentration n'est pas trop élevée (de manière que l'absorbance ne soit pas supérieure à 1).

De plus le coefficient de proportionnalité peut être soit donné par la théorie, soit obtenu à l'aide de l'expérience (par exemple en construisant une droite étalon reliant plusieurs points obtenus expérimentalement, et en calculant la pente de cette droite).

Dans cette section, vous manipulerez des fonctions linéaires et affines, *en vous appuyant sur les Notes de cours*, dans le but de :

- savoir identifier les coefficients (pente, coefficient à l'origine) intervenant dans ces fonctions ;
- déterminer l'équation d'une droite passant par deux points donnés ;
- déterminer un vecteur directeur d'une droite, ou si un vecteur donné est un vecteur directeur ;
- manipuler facilement les équations, passer de $y = ax + b$ à $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et réciproquement ;
- résoudre les systèmes de 2 équations linéaires à deux inconnues, ce qui revient à chercher le point d'intersection éventuel de 2 droites.

II.1.1. Les expressions suivantes permettent de définir une fonction affine f, qui à x associe $y = \alpha x + \beta$. Pour chacune d'elles, déterminer les valeurs de α et β.

(a) $2x - \dfrac{1}{4}$

(b) $3x + 4 - 2x + 8$

(c) $x^2 - (x+5)^2$

(d) $2x - 10 + 2(x+5)$

II.1.2. Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points $(-2, 4)$ et $(3, 1)$.

II.1.3. Est-ce que la droite qui passe par les points $(0, 4)$ et $(2, 0)$ possède une pente négative ?

II.1.4. Soit la droite d'équation $2x + 3y - 4 = 0$.

(a) Déterminer les composantes d'un vecteur directeur.

(b) Est-ce que $\vec{V} = (6, -4)$ peut également être un vecteur directeur ?

(c) Est-ce que la droite passe par le point $(1, 2)$?

(d) Déterminer la pente de cette droite.

II.1.5. Si f est la fonction qui à x associe $y = 3x - 1$,

(a) calculer les images de 0, $\frac{1}{3}$ et 1 ;

(b) écrire l'équation de la droite représentative de f sous la forme : $ax + by + c = 0$.

II.1.6. Si g est la fonction qui à x associe $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$,

(a) calculer les images de 0, -2, $-\frac{1}{2}$ et 4 ;

(b) écrire l'équation de la droite représentative de g sous la forme : $ax + by + c = 0$.

II.1.7. Si h est la fonction qui à x associe $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + 3$,

(a) calculer $h(0)$, $h(\sqrt{2})$ et $h(-2)$;

(b) écrire l'équation de la droite représentative de h sous la forme : $ax + by + c = 0$.

II.1.8. Est-ce que les droites d'équations $3x + 4y - 2 = 0$ et $x - 2y + 2 = 0$ s'intersectent et si oui trouver le point d'intersection.

II.1.9. Est-ce que les droites d'équations $-2x + 4y - 2 = 0$ et $x - 2y + 2 = 0$ s'intersectent et si oui trouver le point d'intersection.

II.1.10. Soit f la fonction qui à x associe $y = 3x + 4$.

(a) Tracer la droite représentative de f.

(b) Quelle est la valeur de la pente de cette droite ?

(c) Est-ce que cette droite passe par le point $(\frac{4}{3}, 0)$?

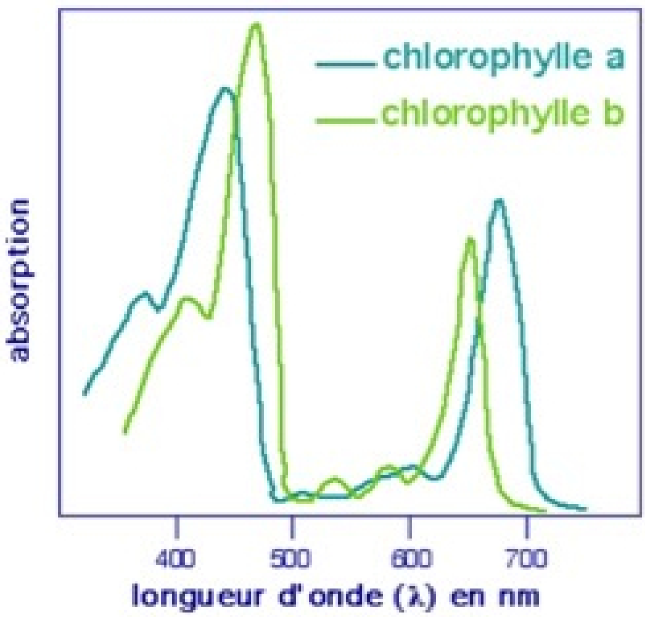
(d) Si on réalise un changement de variable, $Y = y - 4$, et que l'on choisit un nouveau repère $O(x, Y)$ que devient l'équation de la droite ?

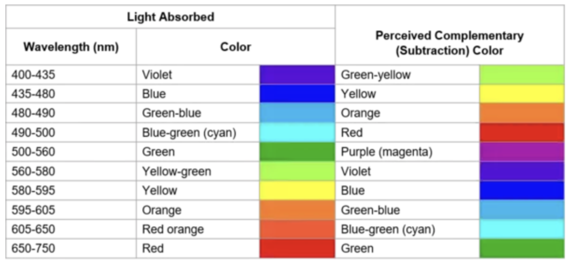
II.2 Exercices appliqués à la Biologie

II.2.1 Loi de Beer Lambert

La loi de Beer Lambert est couramment utilisée pour déterminer la concentration d'une molécule en fonction de son absorption à une longueur d'onde précise. On s'intéresse aux chlorophylles a et b dont les spectres d'absorption sont représentés dans la Fig. II.1.

L'absorption de différentes concentrations (C) de chlorophylle de type a, purifiée, a été mesurée dans des cuves de 1 cm de trajet optique. Les valeurs d'absorbance obtenues (sans unité) ont servi à tracer la droite (Fig. II.2).





Light Absorbed			Perceived Complementary (Subtraction) Color	
Wavelength (nm)	Color			
400-435	Violet		Green-yellow	
435-480	Blue		Yellow	
480-490	Green-blue		Orange	
490-500	Blue-green (cyan)		Red	
500-560	Green		Purple (magenta)	
560-580	Yellow-green		Violet	
580-595	Yellow		Blue	
595-605	Orange		Green-blue	
605-650	Red orange		Blue-green (cyan)	
650-750	Red		Green	

The corresponding colors of the absorbed wavelengths and the complementary color (what we see). (Image Source: LibreTexts™ Chemistry).

FIGURE II.1 – Spectres d'absorption des chlorophylles a et b (source : https://planet-vie.ens.fr/)

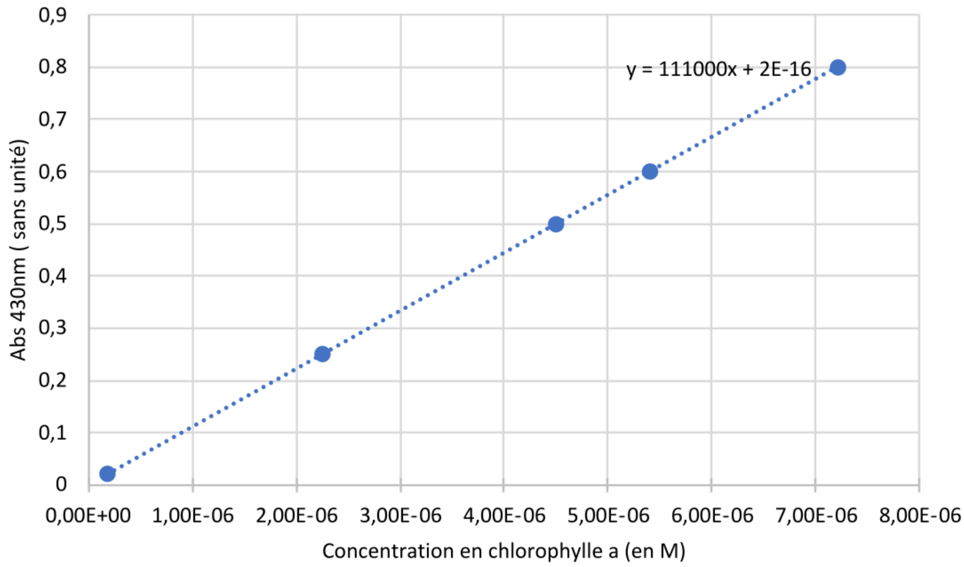


FIGURE II.2 – Absorbance en fonction de la concentration en chlorophylle de type a.

II.2.1.1. Quelles sont approximativement les longueurs d'onde auxquelles les deux types de chlorophylle absorbent le plus ? Ces longueurs d'ondes sont nommées λ_{max}.

II.2.1.2. Donner un titre à la FIG. II.2.

II.2.1.3. À partir de la loi de Beer Lambert, Abs $= \varepsilon C l$, où l est la longueur du trajet parcouru par la lumière ; donner l'unité du coefficient d'extinction molaire ε.

II.2.1.4. Calculer la valeur du coefficient d'extinction molaire de la chlorophylle a.

II.2.2 Concentration en ADN

Vous cherchez à connaître la concentration en ADN double brin de plusieurs échantillons. Une des propriétés des cycles composant les bases de l'ADN est d'absorber la lumière autour de 260 nm, donc plus il y aura d'ADN dans une solution, plus la densité optique (DO) à la longueur d'onde $\lambda = 260$ nm sera élevée. Cette donnée est facilement mesurable à l'aide d'un spectrophotomètre. Vous décidez donc dans un premier temps de tracer une droite permettant d'obtenir la relation entre la DO260nm et la concentration en ADN, appelée également « droite étalon ». Pour cela vous allez mesurer la DO260nm d'échantillons d'ADN double brin dont vous connaissez déjà la concentration. Vous obtenez les résultats suivants :

[ADN] (µg/mL)	0,0	10	20	30	40	50
DO260nm	0,0	0,21	0,38	0,64	0,79	1,0

Tableau II.1 – Valeurs de DO260nm pour différents échantillons d'ADN double brin.

II.2.2.1. Tracez la droite étalon. Déterminez le coefficient directeur de la droite obtenue, et déduisez-en la relation entre la concentration en ADN et la DO260nm.

II.2.2.2. À partir de cette droite étalon, déterminez les concentrations des solutions d'ADN double brin suivantes :

- —Solution A : DO260nm=0,56.
- —Solution B diluée au 1/20^{e} puis mesure de DO260nm=0,27.
- —Solution C diluée à 1/3 puis au 1/2, puis mesure de la DO260nm=0,73.
- —Solution D : 1 volume de la solution D est additionnée de 19 volumes de tampon, puis mesure de la DO260nm=0,13.
- —Solution E : DO260nm=1,25.

On attend une double résolution : graphique d'une part et, d'autre part, avec l'équation déterminée à la question II.2.2.1., ainsi qu'un commentaire sur les valeurs obtenues.

II.2.3 Électrophysiologie

Vous travaillez sur un projet d'électrophysiologie et vous devez mesurer la conductivité d'une solution de chlorure de calcium $CaCl_2$, c'est-à-dire sa capacité à conduire un courant électrique.

$CaCl_2$ (mol/L)	$1{,}0 \times 10^{-3}$	$2{,}0 \times 10^{-3}$	$4{,}0 \times 10^{-3}$	$6{,}0 \times 10^{-3}$	$8{,}0 \times 10^{-3}$	$1{,}0 \times 10^{-2}$
Conductivité (S/cm)	$2{,}3 \times 10^{-4}$	$5{,}2 \times 10^{-4}$	$9{,}9 \times 10^{-4}$	$1{,}47 \times 10^{-3}$	$2{,}03 \times 10^{-3}$	$2{,}1 \times 10^{-3}$

Tableau II.2 – Valeurs de conductivité pour différentes concentrations de $CaCl_2$.

II.2.3.1. Tracez la droite étalon de la conductivité en fonction de la concentration en chlorure de calcium.

II.2.3.2. Calculez le coefficient directeur de la droite et en déduire la relation entre la concentration en chlorure de calcium et la conductivité. Pourquoi ne pas avoir directement calculé cette équation à partir de deux couples de valeurs du tableau II.2 ?

II.2.3.3. Vous avez à estimer pour votre expérience la concentration en $CaCl_2$ de quatre solutions que votre collègue a préalablement préparées :

- —Solution 1 : conductivité 1,72 mS/cm.
- —Solution 2 : conductivité $0{,}63 \times 10^{-3}$ S/cm.
- —Solution 3 : conductivité 3,5 mS/cm.
- —Solution 4 : diluée au 1/10^{e} puis mesure de la conductivité $1{,}36 \times 10^{-4}$ S/cm.

Pour chaque solution, on attend une résolution graphique et une autre utilisant l'équation déterminée à la question II.2.3.2. Comparez les deux résultats et commentez.

II.2.4 Dosage du glucose contenu dans une racine

Le glucose a été dosé par la méthode de triplicat, à partir d'un même extrait de racine, grâce à une réaction colorimétrique. Une droite étalon a été réalisée auparavant (FIG. II.3).

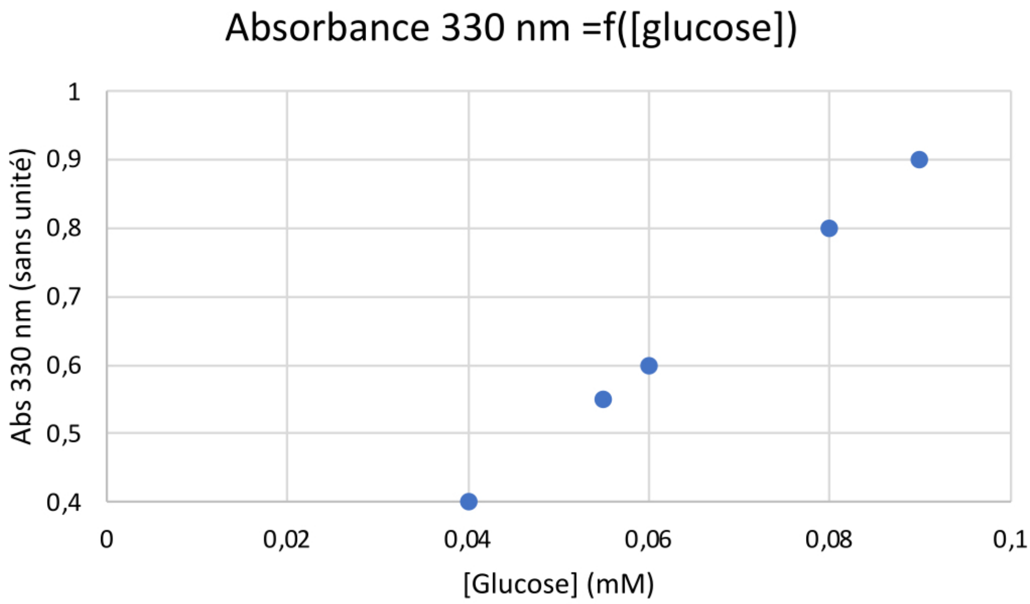


FIGURE II.3 – Absorbance à la longueur d'onde 330 nm en fonction de la concentration en glucose.

II.2.4.1. Afin de déterminer l'équation de la droite étalon, Abs = f([glucose]), utiliser les valeurs représentées dans la FIG. II.3. On considère que la relation de linéarité est conservée pour toutes les valeurs d'absorbance comprises entre 0 et 1. Calculer la pente et l'ordonnée à l'origine.

II.2.4.2. Les valeurs d'absorbance à 330 nm du triplicat correspondant à l'extrait de racines sont : 0,25 ; 0,235 et 0,24. Calculez la concentration en glucose dans l'extrait racinaire.

II.2.5 Dosage de protéines

Une fraction de purification d'extraits cellulaires totaux a été obtenue à partir de 100 millions de cellules. Cette fraction A, a un volume de 0,1 mL. Un dosage des protéines présentes dans cette fraction a été entrepris par un étudiant. Pour cela, il effectue une dilution au $1/10^{e}$ de cet extrait. Il réalise ensuite le dosage protéique grâce à une réaction colorimétrique permettant de suivre la présence des protéines à la longueur d'onde 550 nm.

Protocole utilisé : 100 µL d'extraits dilués + 200 µL d'H_2O + 0,7 mL de réactif C.
Le réactif C permet de faire apparaitre une coloration bleue en présence de protéines. Une droite étalon reliant l'absorbance à 550 nm à la concentration protéique, en mg/L, dans la cuve a été faite en utilisant le même protocole. L'équation de la droite est

$$y = 0{,}005x. \tag{II.1}$$

Pour l'extrait cellulaire étudié, la mesure en duplicat de l'absorbance à 550 nm donne les valeurs suivantes : absorbance à 550 nm du point 1 = 0,19 et absorbance à 550 nm du point 2 = 0,2.

II.2.5.1. Calculer la concentration en protéines dans la cuve.

II.2.5.2. Calculer la quantité de protéines dans la cuve.

II.2.5.3. Calculer la quantité totale de protéines dans l'ensemble de la fraction A.

II.2.5.4. Calculer la quantité de protéines par cellule.

II.3 Exercices appliqués aux Géosciences

II.3.1 Pente topographique

Le profil topographique d'une route est défini, pour une distance horizontale de 5 km, par

$$h(x) = ax + b, \tag{II.2}$$

où h est l'altitude et x la distance horizontale, dont l'origine correspond au début du profil. Les deux variables sont exprimées en mètres.

II.3.1.1. Sachant que le profil débute à une altitude de 100 m et se termine à celle de 600 m, déterminer les constantes a et b. Quelles sont les unités de a et b ?

II.3.1.2. Quelle est la pente de ce profil en % ? Noter que c'est l'information donnée sur les panneaux de signalisation en bord de route.

II.3.1.3. À quelle distance horizontale se situe-t-on lorsqu'on est à 500 m d'altitude ?

II.3.1.4. À quelle altitude se trouve-t-on lorsqu'on a parcouru les 2 cinquièmes de la route ?

II.3.1.5. Tracer le profil et vérifier graphiquement vos réponses aux deux questions précédentes.

II.3.2 Relation MgO-FeO dans les basaltes de rides océaniques

Le basalte est une roche magmatique volcanique issue d'un magma qui s'est refroidi rapidement. Ceux que l'on trouve dans les océans, au niveau des dorsales, s'appellent des MORB (*Mid-Ocean Ridge Basalt*). Le fer (Fe) et le magnésium (Mg) sont présents dans les MORB sous forme d'oxydes FeO et MgO. 10 roches sont analysées chimiquement afin de déterminer le pourcentage (en masse) des différents oxydes qui les composent, le tableau II.3 résume les valeurs obtenues pour deux oxydes FeO et MgO.

n° échantillon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MgO (%)	6,8	7,3	7,51	7,67	8,06	8	8,25	8,38	8,56	8,8
FeO (%)	9,38	9,64	10,29	10,43	10,72	10,80	11,47	11,90	12,07	11,79

Tableau II.3 – Pourcentages massiques des oxydes FeO et MgO, mesurés dans 10 basaltes de rides (MORB).

II.3.2.1. Sans relier les points, reporter les valeurs de pourcentage massique de FeO en fonction de celles de MgO dans un repère cartésien.

II.3.2.2. Tracer la droite d'équation

$$y = -0{,}8 + 1{,}6x,$$

où x est le pourcentage (en masse) de MgO et y celui de FeO. Passe-t-elle passe bien par l'ensemble des valeurs, est-ce une droite de régression valable ?

II.3.2.3. Si non, avec une règle, tracer « à l'œil » la droite qui passe au mieux par l'ensemble des points de mesure puis donner son équation.

II.3.2.4. Que vaut le rapport moyen FeO/MgO ?

Chapitre III

Fonctions usuelles

III.1 Exercices d'entraînement

Dans de très nombreux modèles physiques, les fonctions linéaires ou affines ne suffisent pas pour décrire les relations entre les quantités en jeu. D'autres fonctions sont alors nécessaires, comme

— les fonctions puissance (par exemple $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, etc.),

— les fonctions exponentielles (par exemple $f(x) = 2^x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = 10^x$,...)

— les fonctions logarithmes (par exemple $f(x) = \log_2 x$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = \log_{10} x$,...)

— les fonctions trigonométriques (comme les fonctions sinus, cosinus,...)

Les fonctions puissance se manipulent grâce aux règles des puissances revues dans les Rappels. Les fonctions exponentielles aussi (puisque, par exemple, 2^x n'est rien d'autre que 2 à la puissance x) et on a $e^x e^y = e^{x+y}$, $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$, et $(e^x)^y = e^{xy}$. Elles apparaissent régulièrement pour modéliser des phénomènes de croissance ou de décroissance (dynamique des populations, radioactivité, etc.)

Les fonctions logarithmes sont les fonctions *réciproques* des fonctions exponentielles, celles qui permettent de revenir au nombre initial lorsqu'on a pris l'exponentielle de ce nombre. Leurs règles de calcul sont donc inversées par rapport à celles des exponentielles (cf. les Notes de cours pour plus de détail) : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ et $\ln(x^y) = y \ln x$. Elles apparaissent là où sont les exponentielles, et elles sont très pratiques pour transformer des relations de puissance en relations affines ou linéaires (en chimie des solutions aqueuses, notamment).

Les fonctions trigonométriques apparaissent régulièrement dans les questions où la géométrie intervient, mais aussi pour modéliser les phénomènes périodiques.

Dans cette section, vous manipulerez ce type de fonctions, pas pour devenir des expert-e-s en maths, mais pour *ne pas être démuni-e-s lorsque ces fonctions seront utilisées dans les cadres théoriques et expérimentaux des Sciences de la Vie, de la Terre et de l'Univers.* Vous serez en mesure, *en vous appuyant sur les Notes de cours* :

— de résoudre les équations du second degré (rappel de 2nde)

— de manipuler aisément les puissances, les exponentielles (rappel de 1ère) ;

— de manipuler les logarithmes.

III.1.1. Résoudre chaque équation : on pourra utiliser le discriminant, ou bien, sans le calculer, chercher une racine évidente et en déduire l'autre racine.

(a)	$x^2 - 7x + 6 = 0\,;$	(e)	$3x^2 - 5x = 0\,;$	(i)	$-3x^2 + 7x + 1 = 0\,;$
(b)	$-3x^2 + 2x + 5 = 0\,;$	(f)	$x^2 - 8x + 15 = 0.$	(j)	$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0\,;$
(c)	$x^2 - x\sqrt{2} - 4 = 0\,;$	(g)	$-x^2 + 2x - 1 = 0\,;$	(k)	$z^2 + 5z - 6 = 0\,;$
(d)	$x^2 + x - 6 = 0\,;$	(h)	$1 - t - 2t^2 = 0\,;$	(l)	$x^2 + 3x\sqrt{2} + 4 = 0.$

III.1.2. Transformer l'écriture en une seule puissance, en suivant les règles de calcul rappelées dans les Rappels

(a)	$3^2 \times 3^8\,;$	(d)	$\left((7)^5\right)^2\,;$
(b)	$(-9)^3 \times (-9)^2 \times (-9)\,;$	(e)	$\dfrac{3^5}{3^2}\,;$
(c)	$\dfrac{(-4)^2}{(-4)^4}\,;$	(f)	$\left((-3)^2\right)^3.$

III.1.3. Simplifier (a) $e^3 \times e^4$, (b) $(\exp(3x+2))^2$ et (c) $\dfrac{e^{-x+1}}{e^{3x-4}}$.

III.1.4. Soient x et y deux réels strictement positifs, simplifier le plus possible

(a)	$\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(2x)\,;$	(d)	$\ln(x^3) - \ln(x^2) + \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\,;$
(b)	$2\ln(x^3) - 3\ln(x^2)\,;$	(e)	$\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + \ln(x)\,;$
(c)	$\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right).$	(f)	$\ln(2x+2) - \ln(x+1).$

III.1.5. On considère une fonction puissance $f(t) = Ct^\alpha$, où C et α sont des constantes. Par exemple, t représente le temps et $f(t)$ est la distance parcourue par une masse lâchée en chute libre à l'instant $t = 0$ dans un champ de pesanteur constante ($\alpha = 2$) ; ou t représente le nombre d'animaux d'un troupeau et $f(t)$ la longueur du côté d'un enclos carré destiné à le contenir ($\alpha = 1/2$). Voici une méthode permettant de déterminer graphiquement C et α à partir de données expérimentales

(a) Calculer $\ln f(t)$ et montrer que la relation entre $\ln t$ et $\ln f(t)$ est une relation affine : $\ln f(t) = a \ln t + b\,;$

(b) Proposer une méthode permettant d'estimer les coefficients a et b de la fonction affine précédente à partir des données expérimentales ;

(c) A partir des coefficients obtenus, déterminer ceux de la fonction f.

III.1.6. Transformer les égalités suivantes en équations utilisant l'exponentielle et déterminer la valeur de x quand il est présent

(a)	$\log_2(8) = 3\,;$	(c)	$\log_{10}(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}\,;$	(e)	$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = x\,;$
(b)	$\log_{10}(100000) = 5\,;$	(d)	$\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = x\,;$	(f)	$\log_{10}(0{,}001) = x.$

III.2 Exercices appliqués à la Biologie

III.2.1 Sécurité alimentaire

Des modèles mathématiques permettent de prédire l'évolution des micro-organismes dans les aliments pour en assurer la sécurité microbiologique. Leur croissance dépend des facteurs environnementaux.

La listeria est très résistante dans l'environnement : sol, eaux des rivières, égouts, végétation en décomposition, ensilages avec une acidification insuffisante (origine de contamination de ruminants), excréments

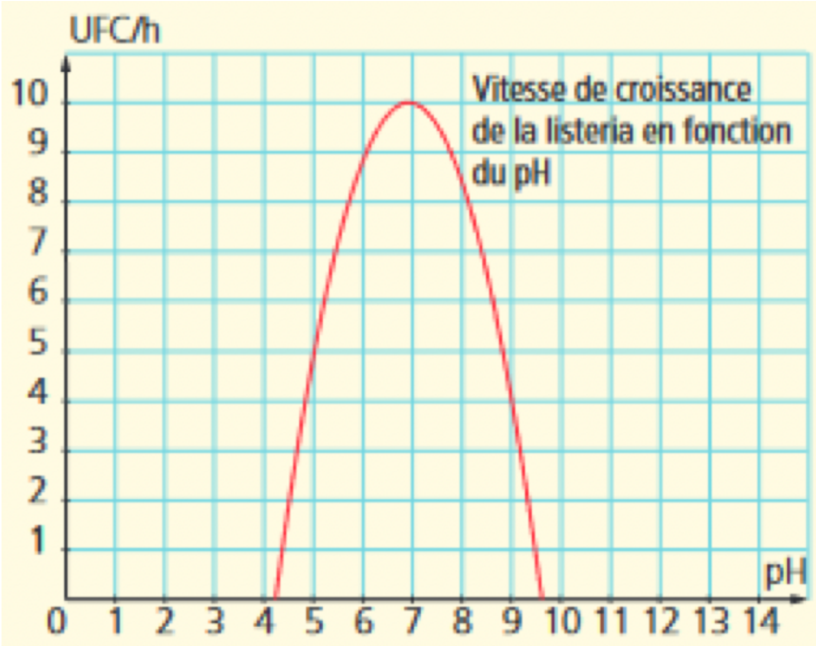


FIGURE III.1 – Vitesse de croissance de la listeria en fonction du pH.

d'animaux contaminés. Cette bactérie peut provoquer la listériose. L'étude ci-dessous donne la vitesse de croissance de la listeria monocytogène en fonction du pH pour une température donnée. La vitesse de croissance est donnée en unités formant colonies par heure de croissance des colonies de listeria (UFC/h).

III.2.1.1. Déterminer le pH ayant une vitesse de croissance maximale.

III.2.1.2. Il est préconisé de conditionner l'herbe ensilée avec un pH égal à 4. Donner une explication à cette préconisation en lien avec la vitesse de croissance des colonies de listeria.

III.2.1.3. Le pH du roquefort est 4,7 et celui du gruyère est 6,2. Déterminer la vitesse de croissance des colonies de listeria et comparer les résultats.

III.2.1.4. La fonction représentant la vitesse de croissance de la listeria en fonction du pH est donnée par la relation

$$f(x) = -1,37x^2 + 18,93x - 55,39 \quad \text{sur l'intervalle } [4,2; 9,6] .$$

(a) Déterminer par le calcul les valeurs de pH pour lesquelles la vitesse de croissance sera supérieure à 2 UFC/h.

(b) Vérifier graphiquement le résultat.

III.2.2 Relation masses corps-cerveau

Le tableau ci-dessous reproduit les valeurs moyennes de la masse du corps et du cerveau pour 7 organismes différents.

III.2.2.1. Tracer le graphique *masse cerveau* = f(*masse corps*). Qu'est-ce qui vous pose problème ?

III.2.2.2. À l'aide d'une calculatrice, compléter les colonnes vides du tableau III.1 en calculant $\log_{10}$(masse corps) et $\log_{10}$(masse cerveau).
Tracez maintenant le graphique $\log_{10}(\textit{masse cerveau}) = f(\log_{10}(\textit{masse corps}))$. Que constatez-vous ? Quels sont les intérêts d'utiliser la fonction $\log_{10}$?

Organisme	**masse corps**	**$\log_{10}$(masse corps)**	**masse cerveau**	**$\log_{10}$(masse cerveau)**
Fourmi	5 mg		0,7 mg	
Rouge-gorge	20 g		1,7 g	
Souris	20 g		0,5 g	
Chat	4,5 kg		45 g	
Humain	70 kg		1,4 kg	
Lion	150 kg		270 g	
Éléphant	6×10^3 kg		11 kg	

Tableau III.1 – Valeurs moyennes de la masse du corps et du cerveau.

III.2.2.3. Tracez une droite passant au plus proche possible des points. Calculez-en le coefficient directeur et déduisez-en son équation. Commentez : êtes-vous satisfaits de cette droite ? Imaginez une application pratique : à quoi pourrait-elle servir ? Quelles seraient les limites de cette application ?

III.2.2.4. Un étudiant entreprend l'étude d'un mammifère en voie d'extinction. Il évalue la masse de son corps à 90 kg. Quelle est la masse approximative du cerveau de cet animal ? Quelle hypothèse avez-vous faite pour faire cette évaluation ?

III.2.3 pH d'une solution

Le pH d'une solution est déterminé par sa concentration en ions H_3O^+ qui varie selon la quantité d'acide et de base présents dans cette solution. L'équation d'Henderson Hasselbalch permet de calculer le pH d'une solution en fonction des caractéristiques et des concentrations du couple acide/base en solution,

$$\text{pH} = \text{pKa} + \log_{10}([A^-]/[AH]). \tag{III.1}$$

Si Ka est la constante de dissociation, à l'équilibre, d'un couple acide/base, pKa$= -\log_{10}(\text{Ka})$; $[A^-]$ et $[AH]$ sont respectivement les concentrations en base et en acide (en mol/L ou M).

Soit un couple acide/base au pKa $= 3{,}5$:

III.2.3.1. L'équilibre de dissociation de ce couple est

$$H_2O + AH \rightleftharpoons A^- + xH_3O^+,$$

trouver la valeur de x pour que cette équation soit équilibrée.

III.2.3.2. Calculer le pourcentage d'acide à pH$= 2$.

III.2.3.3. Calculer le pourcentage de base à pH$= 5$.

III.2.4 Rythme des divisions cellulaires

Le log en base 2 est utilisé pour comparer le rythme des divisions cellulaires au sein de différentes lignées. Différents tissus sont prélevés, puis broyés afin d'isoler des cellules qui sont ensemencées individuellement dans une plaque de culture (une cellule par puits). La plaque est placée dans un incubateur à 37 °C pendant 7 jours. Le tableau ci-dessous donne le nombre de cellules comptées à la fin de l'expérience.

III.2.4.1. Complétez le tableau III.2 en calculant le $\log_2$(nb cellules). À quoi correspondent ces valeurs ? Justifiez votre réponse.

III.2.4.2. Calculez le nombre de divisions cellulaires par jour pour chacun des tissus.

III.2.4.3. Calculez la durée moyenne du cycle cellulaire (durée nécessaire pour obtenir une division) pour chaque tissu.

Tissu	nb de cellules	$\log_2$(nb cellules)	nb divisions/24 h	Durée de cycle cellulaire (h)
Peau	12			
Foie	128			
Rein	256			
Poumon	128			
Colon	1448			

Tableau III.2 – Nombre de cellules à 7 jours post-ensemencement pour cinq types tissulaires.

III.2.5 Dimensions et puissances de dix

III.2.5.1. Attribuer aux grandeurs suivantes une puissance de 10 et une unité physique du système international :
millilitre, hectolitre, térajoule, nanomole, femtolitre, décilitre, kilogramme, décamètre, gigawatt, mégajoule, centimètre, micromole, picogramme.

III.2.5.2. L'Ångström, noté Å, est une unité de longeur définie comme 1/10e de nanomètre, $1\text{Å} = 1 \times 10^{-10}$ m. Dans un premier temps, convertissez les grandeurs suivantes en Å, puis écrivez-les en écriture scientifique, c'est-à-dire en suivant le modèle « a,bc $\times 10^d$ » ; a étant un chiffre unique différent de 0, suivi de deux décimales b et c dont la dernière est arrondie.

(a) un atome : 0,1 nm ;
(b) un virus : 0,1 µm ;
(c) un anticorps : 10 nm ;
(d) une cellule végétale : 0,1 mm ;
(e) une bactérie : 2 µm ;
(f) une molécule d'eau : 0,28 nm ;
(g) une cellule animale : 20 µm.

III.2.5.3. On estime en moyenne qu'un humain possède 3×10^{13} cellules. Combien de milliards de cellules cela fait-il ?

III.2.5.4. On estime que les cellules humaines représentent 43% du nombre total de cellules présentes dans un corps, le reste étant représenté par le microbiote. Combien de cellules du microbiote sont-elles présentes en moyenne chez un humain ?

III.2.5.5. D'un point de vue génétique, on dénombre 20 000 gènes humains pour 20 millions de gènes issus du microbiote. Quelles sont les proportions de gènes humain et provenant du microbiote en % ?

III.2.6 Décroissance de la concentration d'un médicament dans le sang

La concentration d'un médicament dans le sang d'un patient suit une décroissance exponentielle. Au temps t (compté en heures) celle-ci est donc

$$C(t) = C_0 \exp(-kt), \tag{III.2}$$

où C_0 est la concentration initiale au temps $t = 0$ et k est la constante positive qui détermine la décroissance.

III.2.6.1. En supposant que concentration initiale $C_0 = 100$ mg/L et que la constante $k = 0{,}02$ h^{-1}, calculez la concentration du médicament au bout de 4 heures en utilisant l'équation (III.2).

III.2.6.2. La demi-vie d'un médicament est le temps nécessaire pour que sa concentration dans le sang diminue de moitié. Déterminez la demi-vie du médicament en fonction de la constante k.

III.2.6.3. Un médicament est considéré comme éliminé du corps lorsque sa concentration est inférieure à 5 mg/L. Utilisez la fonction C (éq. III.2) pour déterminer après combien de temps le médicament sera éliminé du corps, compte tenu des valeurs de C_0 et k fournies à la question III.2.6.1.

III.2.6.4. En utilisant l'équation (III.2), tracez le graphique représentant la concentration du médicament dans le sang en fonction du temps (en heures), pour une durée de 8 heures. Assurez-vous d'inclure les valeurs initiales C_0 et les légendes appropriées sur les axes. Commentez.

III.2.6.5. En modifiant la valeur de la constante de décroissance, $k = 0{,}2\ \mathrm{h}^{-1}$ et utilisant l'équation (III.2), tracez la concentration du médicament dans le sang en fonction du temps, pour une durée de 8 heures et commentez.

III.2.7 Concentration d'un principe actif

Après injection par voie intramusculaire, le principe actif d'un médicament passe du muscle au sang puis est éliminé par les reins et le foie. On désigne par $f(t)$ la concentration en principe actif (en mM ou mmol.L^{-1}) contenue dans le sang à l'instant t (en heures). Au temps $t = 0$, correspondant à l'heure de l'injection, la quantité injectée est notée q et

$$f(t) = q \exp\left(-\frac{1}{2}t\right). \tag{III.3}$$

Pour la suite, $q = 10$ mM.

III.2.7.1. Pour une durée de 10 h, tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (une dizaine de points suffit).

III.2.7.2. Décrire cette courbe, comment se comporte-t-elle quand la durée devient très grande ?

III.2.7.3. Sachant que le seuil de toxicité plasmatique est fixé à 2,5 mM et l'efficacité médicamenteuse à 1,25 mM, déterminer graphiquement, puis par le calcul, l'intervalle de temps pendant lequel le médicament est efficace.

III.2.8 Croissance logistique d'une plante

Un chercheur étudie la croissance d'une plante et, pour cela, il a recueilli des données expérimentales montrant que la hauteur de la plante suit une croissance logistique. Une croissance est dite logistique lorsque le taux de croissance diminue au fur et à mesure que la taille approche d'un maximum. La hauteur H de la plante, en fonction du temps t, est donc logistique si

$$H(t) = \frac{K}{1 + A\exp(-Bt)}. \tag{III.4}$$

Dans cette équation, A est un paramètre lié à la hauteur initiale de la plante et B est un paramètre lié à la vitesse de la croissance de la plante.
Le chercheur a ajusté les données expérimentales à cette équation et a obtenu les valeurs suivantes :
$K = 1$ m, $A = 10$ et $B = 0{,}2$ jour^{-1}.

III.2.8.1. Que représente K dans l'équation (III.4) ?

III.2.8.2. Calculer la hauteur de la plante au bout de 1 mois (30 jours).

III.2.9 Décroissance radioactive

Un échantillon d'isotope radioactif a une demi-vie (notée $T_{1/2}$) de 10 jours. L'échantillon étudié contient initialement $N_0 = 5000$ atomes de cet isotope. Le nombre d'atomes $N(t)$ varie en fonction du temps tel que

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{t}{T_{1/2}}\right)}. \tag{III.5}$$

III.2.9.1. Calculez le nombre d'atomes restants après 30 jours.

III.2.9.2. Que signifie une demie-vie de 10 jours ?

III.2.9.3. À partir de cette notion de demi-vie, retrouvez simplement le résultat de la question III.2.9.1.

III.2.9.4. Montrer qu'il est équivalent d'écrire que

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\ln(2)\frac{t}{T_{1/2}}\right).$$

III.2.10 Respiration d'un organisme marin

Étude de la fonction sinus

Le tableau ci-dessous permet de calculer les valeurs de la fonction sinus pour certaines valeurs d'angles en degrés (°) et en radians (rad).

α en °	$\sin(\alpha)$	α en rad	$\sin(\alpha)$
0			
30			
60			
90			
120			
150			
180		π	
210			
240			
300			
330			
360		2π	

TABLEAU III.3 – Valeurs de la fonction sinus pour certains valeurs d'angles α.

III.2.10.1. Pour un angle α variant de 0 ° à 360 °, calculer les valeurs de $\sin(\alpha)$ et les reporter dans la seconde colonne du tableau III.3.

III.2.10.2. Compléter les deux autres colonnes du tableau III.3 en convertissant les angles de degrés en radians. Que remarquez-vous ?

III.2.10.3. En prenant le temps t comme variable, tracer la courbe représentative $y = \sin(t)$ pour t variant de 0 à 2π. Quelle est son amplitude ? D'après-vous comment tracer rapidement la courbe représentative de cette fonction sinus entre 2π et 4π ?

III.2.10.4. La période d'un signal est la plus petite distance, entre deux abscisses, qui permet à une fonction de se reproduire identique à elle-même, on écrit $f(t + T) = f(t)$. La période est notée T, elle correspond à une durée (en s dans le SI) si l'axe des abscisses est le temps, comme c'est le cas ici. Quelle est la période de la fonction sinus dont la courbe représentative a été tracée à la question précédente ?

III.2.10.5. Quelle est la différence entre la fonction sinus et une fonction sinusoïdale (par exemple l'éq. III.6) ?

III.2.10.6. Sur le graphe précédent, tracer la courbe représentative $y = 2\sin(x)$. Prendre pour valeur de x les angles en radians (x variant de 0 à 2π). Comparer à la fonction sinus déjà tracée.

III.2.10.7. Sur le graphe précédent, tracer la courbe représentative $y = \sin(2x)$. Prendre pour valeur de x les angles en radians (x variant de 0 à 2π). Comparer à la fonction sinus et à la courbe réalisée à la question précédente.

La fonction sinusoïdale f, telle que

$$f(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right), \tag{III.6}$$

est fréquemment utilisée pour étudier les rythmes répétitifs, comme celui de la respiration. Les battements se répètent au cours du temps et non plus en fonction d'un angle. Les constantes A, T et φ caractérisent cette fonction. A est l'amplitude, T correspond à la période (le temps nécessaire à ce que le phénomène se reproduise identique à lui-même) et φ (angle en rad) correspond au déphasage. Le déphasage est une valeur qui représente le décalage du signal à l'origine, lorsque $t = 0$.

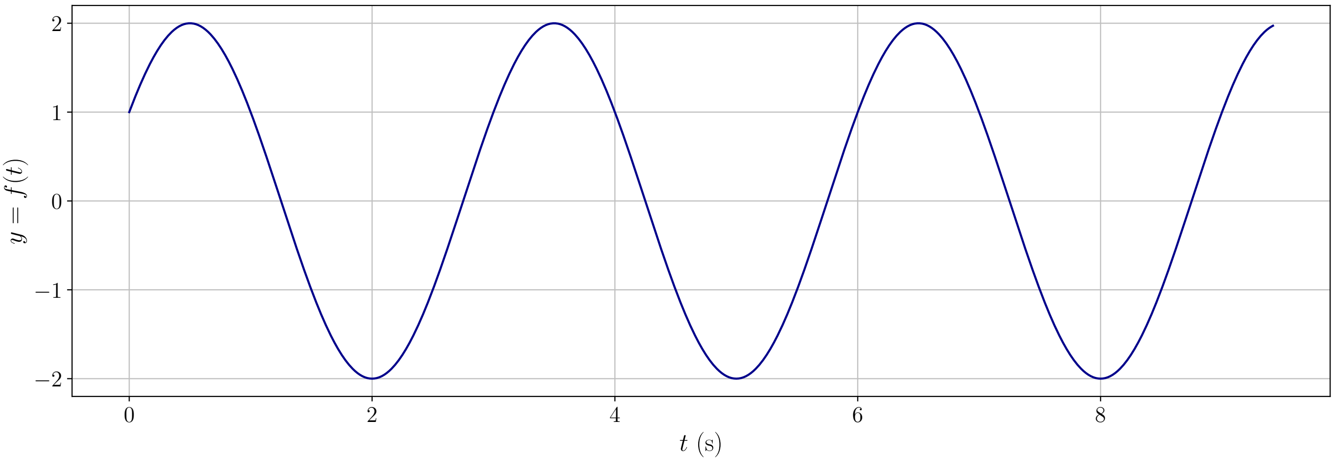


FIGURE III.2 – Fonction sinusoïdale tracée pour des valeurs de t comprises entre 0 et 3π.

III.2.10.7. À partir de la courbe représentative de la fonction sinusoïdale (FIG. III.2), déduire les valeurs des constantes A, T et φ et écrire son équation.

Application à la respiration d'un organisme marin

La respiration d'un organisme marin suit un modèle sinusoïdal modélisé par

$$V(t) = A\left(1 + \sin(\omega t + \varphi)\right), \tag{III.7}$$

où $V(t)$ représente le volume d'air présent dans les poumons en fonction du temps t (en secondes). La pulsation (ou fréquence angulaire) est désignée par ω et φ est le déphasage.

III.2.10.8. À partir de l'éq. (III.7), tracer la variation du volume d'air dans les poumons en fonction du temps avec $A = 100$ mL, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ rad/s (avec $T = 60$ s) et $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ rad.

III.2.10.9. Quelle est l'amplitude de la respiration, c'est-à-dire la variation de volume maximale entre les états « poumons vides » et « poumons pleins » ?

III.2.10.10En utilisant l'équation (III.7), calculer le volume d'air présent dans les poumons au bout de 30 secondes.

III.2.10.11Déterminer la période de la respiration, c'est-à-dire le temps nécessaire pour compléter un cycle complet de respiration.

III.3 Exercices appliqués aux Géosciences

III.3.1 Pente topographique de la Loire

La Loire prend sa source dans le Massif Central, au pied sud-ouest du mont Gerbier-de-Jonc, à 1400 m d'altitude. En longeant le cours d'eau vers l'aval sur une distance d de 1,1 km, jusqu'au village de Cagnard, son altitude est alors de 1300 m. Le gradient topographique est le rapport de la différence d'altitude et de la différence de distance horizontale.

III.3.1.1. Après avoir schématisé la situation par un triangle rectangle, si l'angle avec l'horizontale est noté α, calculer la valeur de $\sin\alpha$.

III.3.1.2. Quelle est la valeur de la pente topographique entre les deux localités ?

III.3.2 Géotherme dans la croûte continentale

On considère que la température varie avec la profondeur dans une croûte continentale (donc jusqu'à environ 30 km) selon la fonction

$$T(z) = 10 + 0{,}028z - 3 \times 10^{-7} z^2, \tag{III.8}$$

T étant la température en °C et z la profondeur en mètres.

À quelle profondeur la température est-elle égale à 500°C ?

III.3.3 Augmentation de la température à l'intérieur de la Terre

Le tableau ci-dessous indique la valeur de la température T en fonction de la profondeur z sous la surface terrestre.

Profondeur z (km)	Température T (°C)
0	10
100	1150
400	1500
700	1900
2800	3700
5100	4300
6360	4300

Tableau III.4 – Modèle simplifié de la distribution de la température à l'intérieur de la Terre.

On tente de décrire cette distribution de la température en fonction de la profondeur (tableau V.4) sous la forme d'un polynôme de degré 2. Une telle fonction ne nécessite donc que trois valeurs de paramètres,

$$T(z) = \sum_{i=0}^{i=2} a_i z^i = a_0 + a_1 z + a_2 z^2. \tag{III.9}$$

III.3.3.1. Quelle est la dimension physique de chacun des coefficients (a_0, a_1 et a_2) dans l'équation (III.9) ?

III.3.3.2. Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, tracer, sur un même graphique, les trois courbes $T_1(z)$, $T_2(z)$ et $T_3(z)$.

III.3.3.3. Après avoir placé sur le même graphique les valeurs données dans le tableau V.4, dire quel modèle est le plus pertinent.

	a_0	a_1	a_2
Modèle 1 (T_1)	1017	1,25	0
Modèle 2 (T_2)	680	1,53	$-1{,}54 \times 10^{-4}$
Modèle 3 (T_3)	1110	1,05	$-8{,}26 \times 10^{-5}$

Tableau III.5 – Coefficients permettant de modéliser la température à l'intérieur de la Terre par des polynômes de degré 2.

III.3.4 Gravité

On considère une masse m située à la surface ou à l'extérieur de la Terre. La distance entre cette masse, considérée comme ponctuelle, et le centre de la Terre est notée r. D'après la loi de la gravitation établie par Isaac Newton, la norme de la force d'attraction gravitationnelle, à laquelle est soumise cette masse m, est

$$f_{\oplus m}(r) = \frac{GM_\oplus}{r^2} m, \tag{III.10}$$

où G est la constante gravitationnelle (G =6,67 × 10^{-11} SI) et $M_\oplus$, la masse de la Terre. SI signifie en unités du Système International.

Si on appelle $g_\oplus$ l'accélération gravitaire de la Terre, $g_\oplus = \dfrac{GM_\oplus}{r^2}$, alors la force exercée par la Terre sur la masse m, à la distance r, est donc $f_{\oplus m}(r) = mg_\oplus$, en général appelé « le poids ».

III.3.4.1. Quelles sont les unités de mesure d'une masse, d'une accélération et d'une force dans le système international ?

III.3.4.2. Déterminer l'unité de la constante G.

III.3.4.3. Si l'on ne prend pas en compte l'atmosphère, le rayon moyen de la Terre $R_\oplus$ égale 6371 km. Sachant que $M_\oplus$ =5,97 × 10^{24} kg, calculer les valeurs de $g_\oplus$ à la surface de la Terre (altitude $h = 0$ m) et à l'altitude $h = 80$ km (la masse de l'atmosphère est plus d'un million de fois inférieure à celle de la Terre solide et peut donc être négligée).

III.3.4.4. Soit $M_☾$ la masse totale de la Lune et $R_☾$ le rayon de sa surface. Exprimer l'accélération gravitaire $g_☾$, mesurée à la surface de la Lune en fonction de $g_\oplus(R_\oplus)$.

Application numérique : $M_☾ / M_\oplus$ =12,307 × 10^{-3} et $R_☾ / R_\oplus$ =0,2725.

III.3.4.5. Sachant que la distance moyenne entre les centres de la Terre et de la Lune, $d_{\oplus - ☾}$, est égale à 384 400 km, calculer la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur la Lune.

III.3.4.6. Comparer les valeurs des différentes forces subies par une masse de 70 kg à la surface de la Terre et de la Lune.

III.3.5 Datation d'une roche

Au sein d'une roche, le nombre d'éléments $N(t)$ d'une espèce radioactive donnée décroît en fonction du temps t selon la loi exponentielle

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t), \tag{III.11}$$

où λ est une constante caractéristique de l'élément chimique considéré.

III.3.5.1. Quelle est l'unité de mesure de λ ?

III.3.5.2. La *période de demi-vie* $T_{1/2}$ de l'élément radioactif correspond au temps pour lequel la moitié des éléments a été désintégrée (*i. e.* $N(T_{1/2}) = N_0/2$).
Exprimer λ ainsi que l'éq. (III.11) en fonction de $T_{1/2}$. Exprimer le temps t en fonction du rapport $N(t)/N_0$.

III.3.5.3. Un rapport $N(t)/N_0$ =0,4 a été mesuré dans un échantillon de roche pour un élément dont la période de demi-vie $T_{1/2}$ égale 5×10^4 ans.
Calculer l'âge de l'échantillon.
Tracer la courbe représentative de la fonction g telle que $g = f\,(N(t)/N_0)$ et placer l'échantillon sur ce graphe.

III.3.6 Croissance d'un minéral cubique

III.3.6.1. On considère un minéral cubique, comme par exemple la pyrite (FeS_2), dont chacune des arêtes croît de 10% en longueur.

(a) Quelle est son augmentation relative de volume (en %) ?

(b) Quelle est l'augmentation relative de sa surface totale (en %) ?

III.3.6.2. Faire les mêmes calculs dans le cas d'une étoile sphérique dont le rayon R s'accroît de 10%.

III.3.6.3. Comparer les résultats relatifs obtenus dans le cas d'un cube et dans celui d'une sphère.

Chapitre IV

Résolutions et manipulations d'équations

IV.1 Exercices d'entraînement

Dans ce chapitre, on s'entraîne à manipuler les fonctions du chapitre précédent, dans le but de *résoudre des équations* où elles interviennent. Dans une équation (c'est-à-dire une *égalité* d'expressions algébriques), si toutes les quantités sont connues sauf une, il est possible, dans certains cas, de déterminer cette dernière, en utilisant des transformations autorisées. Attention, toutes les équations ne possèdent pas une solution unique :

— il y en a qui ont effectivement une unique solution, comme par exemple $2x - 1 = 0$, ou $2^x = 4$, ou encore $\log_{10} x = -2$;

— il y en a qui n'ont aucune solution réelle, comme $x^2 = -1$ ou $e^x = 0$;

— certaines ont plusieurs solutions : $x^2 = 1$, qui a deux solutions (1 et -1), ou $\sin x = 0$ qui a une infinité de solutions (tous les multiples entiers de π, si on utilise les radians comme unités d'angle, qui sont l'unité d'angle du Système international).

Quand on demande de *résoudre* une équation, on cherche donc à déterminer *toutes* les solutions, et pas simplement en trouver une.

Pour résoudre une équation, il est souvent pratique de la transformer en une équation du type $f(x) = 0$, où la fonction f peut s'écrire comme un *produit* de fonctions : on dit qu'on a *factorisé* la fonction f. On peut utiliser alors la règle selon laquelle un produit est nul si (et seulement si) un des facteurs au moins est nul, puis chercher à résoudre *toutes* les équations obtenues.

Après cet entraînement, et *en vous appuyant sur les Notes de cours*, vous serez en mesure de

— résoudre facilement les équations rencontrées en classe de Seconde et Première.

— résoudre les équations simples faisant intervenir les exponentielles, logarithmes, fonctions trigonométriques vues précédemment.

IV.1.1. Une recette pour réaliser des crêpes pour 6 personnes propose : 250 g de farine, 0,5 L de lait, 4 œufs et 1 g de sel. Calculer les quantités pour 8 personnes.

IV.1.2. Une entreprise propose différentes quantités d'acide chlorhydrique à différents tarifs : 1 L pour 4 €, 10 L pour 35 € et 20 L pour 50 €.

(a) Le prix est-il proportionnel au volume (justifier la réponse) ?

(b) Calculer le prix que devrait coûter 14 L si les tarifs étaient propotionnels entre 10 et 20 L.

IV.1.3. Pour chaque équation écrire le domaine de définition, si ce n'est pas $\mathbb{R}$, et la résoudre.

(a)	$2x+5=5x-12$;	(g)	$\ln(x)=1$;
(b)	$\dfrac{2x-3}{5x+2}=2$;	(h)	$y^2-6y+9=4$;
(c)	$\exp(2x)=4$;	(i)	$3x^2-3=\dfrac{6}{x}-6x$;
(d)	$2x+4=\dfrac{20}{x}-2$;	(j)	$x-3\sqrt{x}-4=0$;
		(k)	$\sqrt{x-3}+2=0$;
(e)	$\ln(x+3)+\ln(x+1)=\ln(x+13)$;	(l)	$\sqrt{x-3}+\sqrt{x}=1$;
(f)	$3x-10=8-\dfrac{15}{x}$;	(m)	$\dfrac{7}{x+1}=\dfrac{2}{x}$.

IV.1.4. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle considéré

(a) $\ln(x+4)=2\ln(x+2)$, sur $]-2,+\infty[$;

(b) $\ln(3x-1)-\ln(x)=\ln(2)$, sur $\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$.

IV.1.5. Résoudre les équations suivantes sur $]-\pi,\pi]$

(a)	$\cos\theta=0$	(d)	$\sin\theta=-1$	(g)	$\sin\theta=\cos\theta$
(b)	$\sin\theta=0$	(e)	$\cos\theta=\frac{1}{2}$	(h)	$\sin\theta=-\cos\theta$
(c)	$\cos\theta=1$	(f)	$\sin\theta=-\frac{1}{2}$		

IV.2 Exercices appliqués à la Biologie

IV.2.1 Génome d'ADN

IV.2.1.1. Sur un génome à ADN double brin, les nucléotides d'un brin sont associés par complémentarité avec le nucléotide du second brin qui forment une paire de bases : les A avec les T, et les C avec les G. Si un génome double brin de 3 milliards de paires de bases possède 20% de A, combien y-a-t-il de A, de T, de C et de G, en nombre de nucléotides et en % du total ?

IV.2.1.2. L'ADN B double brin est structuré sous forme de double hélice. Chaque paire de base rallonge l'hélice de 0,34 nm. Le chromosome X possède 152 millions de paires de bases, et le chromosome Y en possède trois fois moins. Calculer la longueur en cm de ces deux chromosomes.

IV.2.2 Taille de cellules

IV.2.2.1. À partir de la figure IV.1, calculer la taille réelle d'un lymphocyte (cellule violette au centre de l'image) et d'un érythrocyte (cellules grises périphériques).

IV.2.2.2. Calculer le grossissement sur la figure IV.1 à partir de la taille de la barre.

IV.2.2.3. Calculer la taille réelle des 2 types cellulaires en utilisant le grossissement.

IV.2.2.4. Pour calculer le grossissement global d'un microscope, on multiplie le grossissement de l'oculaire avec lequel vous observez l'échantillon par celui de l'objectif choisi. Vous observez sur l'oculaire l'indication ($\times 10$) et sur les 3 objectifs de votre microscope ($\times 4$), ($\times 10$), ($\times 500$). Quels sont les grossissements que vous pouvez obtenir avec ce microscope ?

IV.2.3 Saturation d'un Western Blot

On rappelle les définitions suivantes :

FIGURE IV.1 – La taille agrandie est égale à taille réelle multipliée par le grossissement.

— C, la concentration molaire, en mol/L ;
— C_m, la concentration massique, en g/L ;
— V, le volume, en L ;
— MM, la masse molaire, en g/mol ;
— m, la masse, en g.

On définit

$$C = \frac{n}{V} \quad \text{et} \quad C_m = \frac{m}{V}, \tag{IV.1}$$

avec $n = \dfrac{m}{MM}$, la quantité de matière (mol).

Pour une dilution,

$$C_1V_1 = C_2V_2,$$

avec C_1 la concentration solution mère, V_1 le volume à prélever dans la solution mère, C_2 et V_2 les concentration et volume souhaités pour la solution fille à préparer.

IV.2.3.1. Vous souhaitez fabriquer une solution 1 très concentrée d'albumine bovine (BSA) pour l'étape de saturation d'un Western Blot. Vous souhaitez en fabriquer 5 L à la concentration de 1 M (c'est-à-dire 1 mol/L) à partir de BSA en poudre, de masse molaire $MM = 66{,}0$ g/mol. Combien de grammes de BSA allez-vous peser pour fabriquer la solution 1 ?

IV.2.3.2. Cette solution 1 est votre solution stock et vous voulez, à partir de celle-ci, fabriquer une solution 2 deux moins concentrée, en la diluant avec de l'eau distillée pour l'utiliser en Western Blot. Vous souhaitez 1 L. Quel est le facteur de dilution ? Quels volumes de solution 1 et d'eau distillée allez-vous prélever pour fabriquer la solution 2 ?

IV.2.4 Dilutions

Vous avez au laboratoire une solution stock de tampon phosphate d'une concentration 10X. Vous devez la diluer dans de l'eau distillée pour fabriquer une solution fille pour une expérience, vous souhaitez une concentration finale de 1X et un volume de 2,5 L.

IV.2.4.1. Quel est le facteur de dilution ? Quels volumes de solution 1 et d'eau distillée allez-vous prélever pour fabriquer la solution 2 ?

IV.2.4.2. Vous souhaitez fabriquer 1,5 L d'une solution 3, diluée au 1/5^{e} par rapport à la solution 1. Quels volumes de solution 1 et d'eau distillée allez-vous prélever pour fabriquer la solution 3 ?

Vous avez au laboratoire une solution stock de BSA, la solution 4, d'une concentration de 10%. Une concentration de 10% signifie que l'on a 10 g du solide (ici de BSA) dilués en solution dans 100 mL du solvant (ici l'eau distillée).

IV.2.4.3. Vous souhaitez fabriquer 1 L d'une une solution 5 à 1%. Quel est le facteur de dilution par rapport à la solution 4 ? Quels volumes de solution 4 et d'eau distillée allez-vous prélever pour fabriquer la solution 5 ?

IV.2.4.4. Vous souhaitez fabriquer 750 mL d'une solution 6 à 0,5%. Quel est le facteur de dilution par rapport à la solution 4 ? Quels volumes de solution 4 et d'eau distillée allez-vous prélever pour fabriquer la solution 6 ? Et si vous étiez partis de la solution 5 ?

IV.2.5 Concentrations molaire et massique

IV.2.5.1. À partir de l'équation (IV.1), exprimez la concentration molaire C en fonction de la concentration massique C_m.

IV.2.5.2. Si la quantité de matière d'un composé est $n = 20$ µmol et que le volume de la solution est de 50 mL, quelle est la concentration C en mol/L ?

IV.2.5.3. Si la masse d'un composé est $m = 20$ µg, que sa masse molaire est $MM = 17$ g/mol et que le volume de la solution est de 100 mL, quelle est la concentration C en mol/L ?

IV.2.6 Solution tampon

On souhaite réaliser 100 mL d'une solution tampon à 100 mM de pH = 7,5. On utilise pour cela un couple Acide/Base d'un pKa = 8,3. MM Acide = 121,3 g/mol et MM Base = 120,3 g/mol.

On rappelle l'équation d'Henderson Hasselbalch,

$$\mathrm{pH} = \mathrm{pKa} + \log([A^-]/[AH]). \tag{IV.2}$$

IV.2.6.1. Calculez le pourcentage de chaque espèce pour obtenir le pH voulu.

IV.2.6.2. Calculez la masse de base et d'acide à peser pour réaliser cette solution.

IV.2.7 Diplodocus et Allosaurus

On donne les relations suivantes :

— La hauteur de hanche est égale à 4,5 fois la longueur de la trace de pas ;

— la vitesse (en m/s) d'un dinosaure est donnée par l'équation d'Alexander,

$$v = \frac{\sqrt{g}}{4} f^{1,67} h^{-1,17}, \tag{IV.3}$$

où g est l'accélération de la pesanteur ($g = 9{,}8$ m/s^2), f la foulée (en m) et h la hauteur de hanche (en m).

— Pour un Diplodocus la trace de pas est de 0,67 m et la foulée de 5,5 m ;

— pour un d'Allosaurus la trace de pas est de 0,85 m et la foulée de 10,2 m.

IV.2.7.1. Un Allosaurus poursuit un Diplodocus. Calculez les vitesses en m/s, puis km/h, des deux dinosaures.

IV.2.7.2. Le diplodocus est parti avec 100 m d'avance, au bout de combien de temps environ son prédateur le rattrapera-t-il ?

IV.3 Exercices appliqués aux Géosciences

IV.3.1 Production de carrières

Traduire le texte suivant sous forme d'équations générales, puis effectuer l'application numérique.

On souhaite comparer les productions de quatre carrières notées A, B, C et D.
La carrière A produit 560 tonnes de plus que la carrière B. La carrière C produit 2700 tonnes, soit 100 tonnes de moins que la carrière B. La carrière D produit deux fois plus que la carrière A. Combien produisent chacune des carrières ?

IV.3.2 Fusion à la base d'un glacier

On cherche à déterminer la pression et la température de fusion d'un glacier d'épaisseur H.
En désignant par z la profondeur et ρ la masse par unité de volume (*masse volumique*) de la glace, l'augmentation de la pression ΔP en fonction de la profondeur a pour expression

$$\Delta P = \rho g z, \tag{IV.4}$$

où g est l'accélération de la gravité.

IV.3.2.1. Quelles sont les unités de mesure de ρ, g et z dans le Système International de mesure (S.I.) ?
IV.3.2.2. En déduire l'unité de mesure de ΔP.
IV.3.2.3. Des mesures effectuées en laboratoire montrent que la température de fusion T_f de la glace diminue linéairement avec l'augmentation de pression ΔP. Exprimer la phrase précédente sous forme mathématique en utilisant deux coefficients a et b (on pose que a désigne la pente).
IV.3.2.4. Quelles sont les unités de mesure de a et b ?
IV.3.2.5. D'après votre expérience personnelle, quelle est la valeur de b ?
IV.3.2.6. Exprimer la température de fusion en fonction de la profondeur en combinant l'expression obtenue à la question précédente avec l'équation (IV.4).
IV.3.2.7. Sachant que la glace est 10% moins dense que l'eau liquide, quelle est la valeur de sa masse volumique (dans le S.I.) ?
IV.3.2.8. En considérant que g =9,81 S.I. et a =8×10^{-8} S.I., calculer $T_f(H = 100\text{m})$ et $P(H = 100\text{m})$.
IV.3.2.9. Tracer les courbes $T_f(z)$ et $P(z)$ depuis la surface jusqu'à la profondeur $H = 100$ m. On prendra $P(0) = 10^5$ Pa.

IV.3.3 La trigonométrie en pratique

IV.3.3.1. Une personne se situe à 100 m de distance du sommet d'une colline. Elle observe que, depuis sa position, l'angle entre le sol et le sommet de la colline est égal à $\alpha = 30\,°$. Quelle est l'altitude de la colline par rapport au sol ?
IV.3.3.2. Une personne voyageant dans le désert mesure un angle $\alpha_1 = 20\,°$ entre le sol et le sommet d'une dune de sable. Elle se rapproche de 1 km de la dune en marchant sur un sol horizontal et mesure un nouvel angle $\alpha_2 = 35\,°$. Quelle est la hauteur de la dune ?
IV.3.3.3. En première approximation la pyramide de Gizeh peut être considérée comme un pentaèdre parfait à base carrée dont les côtés mesurent $l = 230{,}33$ m. Les faces de la pyramide sont inclinées d'un angle $\alpha = 51{,}84\,°$ par rapport à l'horizontale. Quelle est la valeur de la hauteur h de la pyramide ?

IV.3.3.4. Deux stations sismologiques localisées à la même latitude, notées respectivement A et B, sont distantes l'une de l'autre de 8 km. Les ondes sismiques générées par un séisme arrivent à la station A avec un angle de N40 °W (Ouest) et à la station B avec un angle de N20 °E (Est). Quelles sont les distances respectives de ces deux stations par rapport au séisme ?

Chapitre V

Variabilité et incertitudes

V.1 Exercices d'entraînement

La *variabilité* est inhérente aux processus de mesure : aucun appareil de mesure n'est idéal, et toute mesure s'appuie sur la stabilité de grandeurs statistiques, comme les moyennes. L'information sur les moyennes est importante, mais il est indispensable de tenir compte de l'*incertitude* autour de la moyenne, donnée directement ($\pm 0,1$ par exemple) ou évaluée par un écart-type.

Lorsqu'une grandeur (par exemple la longueur x du côté d'un carré) intervient dans une formule pour calculer une autre grandeur (par exemple l'aire du carré $A = x^2$), on peut calculer l'incertitude sur la seconde si on connaît l'incertitude sur la première, en utilisant un calcul qui ressemble beaucoup au calcul des dérivées de fonctions :

$$(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \simeq x^2 + 2x\Delta x, \ \text{ donc } \Delta(x^2) = 2x\Delta x\,,$$

qu'on peut écrire $\dfrac{\Delta(x^2)}{\Delta x} = 2x$ pour expliciter l'analogie avec le calcul de dérivées ("la dérivée de x^2 est $2x$"). Dans ce calcul, on a volontairement négligé (supprimé) le terme $(\Delta x)^2$, ce qu'on peut justifier de manière empirique ($(\Delta x)^2$ est très petit devant x^2 car Δx est très petit devant x) ou mathématique. Ces calculs permettent de calculer des incertitudes absolues (Δx) et aussi des incertitudes relatives ($\frac{\Delta x}{x}$), utilisées couramment, par exemple lorsqu'une grandeur est connue à 1% près.

Vous serez en mesure, après ces exercices, et *en vous appuyant sur les Notes de cours*, de

— calculer moyenne, variance, écart-type, médiane, quantiles d'une série de données ;

— calculer l'incertitude absolue et relative d'une grandeur donnée comme fonction d'autres grandeurs dont les incertitudes sont connues ;

V.1.1. Donner le domaine de définition et calculer la dérivée de

(a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4\,;$

(b) $f(x) = \sqrt{2x} - 5x\,;$

(c) $f(x) = x^2 - (x+5)^2\,;$

(d) $f(x) = x - 2 - 2\ln(x)\,;$

(e) $f(x) = x\ln(x)\,;$

(f) $f(x) = \ln(1 + x^2)\,;$

(g) $f(x) = 3\exp(5x^2)\,;$

(h) $f(x) = \sin(2t - 4x)\,;$

(i) $(fx) = x^3 + \sqrt{x}\,;$

(j) $f(x) = 4x^2\cos(5x)\,;$

(k) $f(x = \dfrac{4x-1}{2x+5}\,;$

(l) $f(x) = \dfrac{\cos(x) + \sin(x)}{1 + \sin(x)}.$

V.1.2. Les masses (en kg) de 10 enfants à la naissance sont 3,2 ; 2,4 ; 3,3 ; 3,4 ; 3,9 ; 2,9 ; 3,3 ; 4,5 ; 1,9 ; 3,3.

(a) Calculer la masse moyenne, et l'écart-type de la masse des enfants.

(b) Cinq mères ont travaillé pendant leur grossesse, ce sont les $1, 3, 4, 7, 10$; calculer la moyenne des cinq masses correspondantes et la variance.

(c) Même questions avec les cinq autres masses, celles des enfants dont les mères n'ont pas eu d'activité professionnelle pendant leur grossesse. Commenter les résultats.

V.1.3. Le tableau ci-dessous indique les distances domicile-faculté d'un groupe d'étudiantes et étudiants en licence 1.

Distance (km)	0	1	2	3	4	5	8
Effectif	5	21	24	15	20	13	2

Tableau V.1 – Distances domicile-faculté et effectifs correspondants (0 km signifie moins de 1 km).

(a) Combien de personnes comporte le groupe étudié ?

(b) Déterminer la distance moyenne entre le domicile et la faculté.

(c) Quel est l'écart-type de cette série (arrondir au centième) ?

(d) Quelle est la médiane de cette série ? Déterminer l'intervalle interquartile.

(e) On s'intéresse uniquement aux étudiantes et étudiants qui n'habitent pas dans les environs immédiats de la faculté (c'est-à-dire à au moins 1 km). Quel est, dans ce groupe, le pourcentage de personnes qui vivent à cinq kilomètres ou plus de la faculté (arrondir au centième) ?

V.1.4. Soit deux volumes mesurés $B = 15 \pm 0{,}3$ L et $C = 8 \pm 0{,}2$ L, quelle est la valeur de $A = B + C$?

V.1.5. Si $A = B + C$,

(a) quelle est l'expression de ΔA, l'incertitude absolue de A, à partir des incertitudes ΔB et ΔC ?

(b) Quelle est l'expression de l'incertitude relative $\dfrac{\Delta A}{A}$?

(c) On mesure les diamètres intérieur (d_1) et extérieur (d_2) d'un cylindre creux,

$$d_1 = 19{,}5 \pm 0{,}1 \text{ mm} \quad \text{et} \quad d_2 = 26{,}7 \pm 0{,}1 \text{ mm}.$$

Quelle est l'épaisseur e du cylindre, l'incertitude absolue de e et l'incertitude relative ?

V.1.6. Mêmes questions (a) et (b) avec $A = BC$ et $A = \dfrac{B}{C}$.

V.1.7. Si $A = B^n$, comment écrire l'incertitude relative de A ? En déduire l'incertitude absolue de A.

V.1.8. (a) Soit un cube d'arête $a \pm \delta_a$, comment s'écrit l'incertitude relative et absolue du volume V ?

(b) Un cube de granite a une masse $m = 1375 \pm 3$ kg et une arête de longueur $a = 0{,}79 \pm 0{,}01$ m, quelle est la valeur de la masse volumique, $\rho = \dfrac{m}{V}$, de son incertitude absolue et relative ?

V.1.9. Suivant le théorème d'Archimède, la densité d'un corps solide insoluble et non poreux peut se déterminer à partir de 3 mesures de masses m_1, m_2 et m_3, et

$$d = \frac{m_1 - m_2}{m_3 - m_2}.$$

Si les trois masses sont déterminées avec la même balance ($dm_1 = dm_2 = dm_3 = dm$), écrire l'expression de $\dfrac{\Delta d}{d}$, l'incertitude relative de la densité.

V.2 Exercices appliqués à la Biologie

V.2.1 Statistiques sur la taille d'une population de coquillages

La répartition des tailles de 83 coquillages suit une loi Normale. On a calculé une moyenne $\mu = 52{,}17$ mm et un écart-type $\sigma = 1{,}8$ mm. À partir de la défintion de la gaussienne, pouvez-vous dire

V.2.1.1. entre quelles valeurs se situent 68% des échantillons ?

V.2.1.2. entre quelles valeurs se situent 95% des échantillons ?

V.2.2 Statistiques sur la taille d'une population d'élèves

On a mesuré en cm la taille des élèves d'une classe. Les résultats sont regroupés dans le tableau V.2.

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

Tableau V.2 – Taille en cm de 40 élèves.

V.2.2.1. Calculer la taille moyenne de la classe, ainsi que la taille médiane.

V.2.2.2. Calculer l'écart-type et la variance.

V.2.3 Abondance de l'hydrogène

On retrouve dans la nature 3 isotopes de l'Hydrogène (atome comportant 1 proton). Vous étudiez un échantillon de sol et obtenez les abondances suivantes :

- 1H ou protium (1 proton, 0 neutron) est l'isotope le plus abondant avec 99,98%, sa masse atomique est de 1,0 g/mol ;
- 2H ou deutérium (1 proton + 1 neutron) est stable et présent à hauteur de 0,019%, sa masse atomique est de 2,0 g/mol ;
- 3H ou tritium (1 proton + 2 neutrons) est rare car radioactif (se désintègre en fonction du temps) à hauteur de 0,001%, sa masse atomique est de 3,0 g/mol.

V.2.3.1. Calculer en moyenne la masse atomique d'un atome d'hydrogène dans votre échantillon. On utilise habituellement la masse molaire de 1 g/mol pour des calculs simples mettant en jeu l'hydrogène.

V.2.3.2. Que pensez-vous de cette simplification ? Quels sont ses avantages et ses limites ?
Les atomes d'hydrogène sont amenés à former des molécules avec d'autres atomes. Par exemple, l'hydrogène gazeux sous la forme H_2, est l'association de 2 atomes d'hydrogène. On rappelle qu'une mole est un « paquet » de $6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}$ entités similaires (atomes ou molécules).

V.2.3.3. Quelle est la masse molaire de H_2 ?

V.2.3.4. Combien de moles de H faut-il pour obtenir une mole de H_2 ?

V.2.3.5. Combien d'atomes d'hydrogène y a-t-il dans une mole de H ? Dans une mole de H_2 ?

V.2.4 Lame de Malassez

Pour compter les cellules au laboratoire, on utilise une lame dite de « Malassez » sur laquelle ont été gravés 100 rectangles, contenant eux-mêmes 20 petits carrés. La zone de comptage totale, correspondant à ces 100 rectangles, équivaut à un volume de 1 microlitre (µL). En pratique, la méthode de comptage consiste à dénombrer le nombre de cellules dans 10 rectangles (équivalent à 0,1µL), et à en extrapoler la concentration en cellules.
Vous voulez compter le nombre de leucocytes obtenus à partir d'un échantillon sanguin. Pour cela, vous avez 1mL de tampon dans lequel sont contenus vos leucocytes. Vous diluez au 1/20e cette suspension cellulaire, puis vous déposez le volume nécessaire sur votre Malassez. Vous comptez 10 rectangles au hasard sur le haut de la lame, vous trouvez 108 cellules, puis 10 rectangles au milieu de la lame, sur lesquels vous trouvez 112 cellules, et idem en bas de la lame, où vous comptez 125 cellules.

V.2.4.1. Calculez la moyenne, la variance et l'écart-type du nombre de cellules dans un comptage. On considère que le comptage est correct si l'écart-type est inférieur à 20% de la moyenne (suspension cellulaire homogène), est-ce le cas ici ?

V.2.4.2. Calculez la concentration cellulaire de l'échantillon mesuré (cellules/mL).

V.2.4.3. Calculez la concentration cellulaire de l'échantillon sanguin initial (cellules/mL).

V.2.4.4. Pour un second patient, vous utilisez la même technique de comptage, et vous comptez 102, 176 et 150 cellules. Calculez la moyenne, la variance et l'écart-type du nombre de cellules dans un comptage. Que concluez-vous ?

V.2.5 Trajet d'une graine de *Hura crepitans*

L'arbre « bac à sable » (*Hura crepitans*) est un arbre à feuilles persistantes originaire des régions tropicales d'Amérique du Nord et du Sud, qui peut atteindre 60 m. Les gousses de graines mûres de cet arbre explosent pour disperser les graines, celles-ci pouvant être catapultées jusqu'à 100 m de l'arbre. Considérons une gousse lançant ses graines verticalement depuis la cime d'un arbre de 60 m de haut et supposons qu'elles retombent ensuite sur le sol, sans obstacle durant leur chute. Au cours de son trajet, la hauteur d'une graine est définie en fonction du temps par

$$h(t) = 4{,}9t(2{,}5 - t), \tag{V.1}$$

h étant la hauteur en mètres (calculée à partir du point de départ) et t, le temps en secondes.

V.2.5.1. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la graine durant son trajet ?

V.2.5.2. Au bout de combien de temps la graine arrive-t-elle au sol ?

V.3 Exercices appliqués aux Géosciences

V.3.1 Flux de chaleur dans la croûte continentale

On considère que la température varie avec la profondeur dans une croûte continentale selon la fonction suivante

$$T(z) = 10 + 0{,}028z - 3 \times 10^{-7}z^2, \tag{V.2}$$

T étant la température en °C et z la profondeur en mètres. Le flux de chaleur q, en W/m^2, est défini par

$$q(z) = 2{,}5\frac{dT}{dz}. \tag{V.3}$$

V.3.1.1. Trouvez l'équation de q en fonction de z. Calculez le flux de chaleur à la surface et à 20 km de profondeur.

V.3.1.2. Calculez la température à 10 et à 30 km de profondeur.

V.3.1.3. Si on néglige le terme en z^2 dans l'équation (V.2), quelle différence de température trouve-t-on à 30 km de profondeur par rapport à la question précédente ? Comment varierait alors le flux de chaleur avec la profondeur ?

V.3.2 Vitesse de la plaque Pacifique

Le point chaud de Hawaï se situe sous la plaque tectonique Pacifique. Chaque grande période d'éruption génère un nouveau volcan et, comme la plaque Pacifique s'est déplacée entre temps, le point chaud construit ainsi une chaîne volcanique. Tous les volcans s'alignent suivant une même direction : la trace du point chaud en surface. Le tableau V.3 présente l'âge t_i des 5 volcans principaux de cette chaîne ainsi que leurs inter-distances Δd_{ij}, où les indices i et j indiquent les numéros des deux volcans considérés.

N°	Volcan (île)	Âge t_i (Ma)	Inter-distance Δd_{ij} (km)	Vitesse v_{ij} (cm/an)	Distance d_i (km)
1	Wai'ale'ale (Kaua'i)	5,1	$\Delta d_{12} = 150$		
2	Wai'anae (O'ahu)	3,7	$\Delta d_{23} = 215$		
3	Haleakalā (Maui)	2,0	$\Delta d_{34} = 150$		
4	Mauna Loa (Hawa'i)	1,0	$\Delta d_{45} = 110$		
5	Lō'ihi	0,4	–		0

Tableau V.3 – Âges de 5 volcans de la chaîne hawaïenne, exprimés en millions d'années (Ma), et inter-distances entre les différents couples.

V.3.2.1. En considérant que le point chaud est fixe, calculer, en cm/an, les 4 valeurs ponctuelles de la vitesse de déplacement v_{ij} de la plaque Pacifique qu'il est possible de calculer.

V.3.2.2. Calculer la moyenne $\bar{v}$ des vitesses ponctuelles, leur variance et leur écart-type.

V.3.2.3. Calculer la distance d_i de chaque volcan par rapport au volcan Lō'ihi.

V.3.2.4. On cherche à évaluer la vitesse moyenne de la plaque Pacifique grâce à une analyse graphique dans un repère $[O, (t, d)]$. Reporter en abscisse l'âge de chaque volcan et la distance d_i en ordonnée.

V.3.2.5. Tracer la droite de regression qui permet de modéliser au mieux les données. Expliquer pourquoi la droite ne passe pas par O le centre du répère.

V.3.2.6. Que représente le coefficient directeur de la droite de régression ? Comparer sa valeur avec celle de $\bar{v}$.

V.3.3 Profil topographique

Un profil topographique est effectué en mesurant, en fonction de la distance horizontale, notée x, les différences d'altitude, $\Delta h(x)$, par rapport à l'altitude du point précédent. L'ensemble des mesures sont reportées dans le tableau V.4.

V.3.3.1. Sachant que l'altitude du point de départ, $h(x = 0)$, est égale à 47 mètres, calculer l'altitude $h(x)$ de chaque point de mesure. Reporter ces valeurs dans le tableau V.4 et les représenter sur un graphe $(x, h(x))$, pour lequel l'axe x définit l'axe des *abscisses* et l'axe $y = h(x)$ celui des *ordonnées*.

x	$\Delta h(x)$	$h(x)$	x	$\Delta h(x)$	$h(x)$	x	$\Delta h(x)$	$h(x)$	x	$\Delta h(x)$	$h(x)$
0	0,00		2	0,43		4	0,64		6	0,81	
8	0,99		10	0,76		11	0,54		14	1,01	
15	1,18		18	1,44		19	1,63		21	0,45	

Tableau V.4 – Mesures topographiques réalisées sur le terrain, les distances et les longueurs sont exprimées en mètres.

V.3.3.2. Calculer la distance moyenne $\bar{x}$ et l'altitude moyenne $\bar{h}$ du profil topographique, leurs variances σ_x^2 et σ_h^2, ainsi que leurs écart-types σ_x et σ_h. Cette question peut être traitée de façon collaborative.

V.3.3.3. Une régression linéaire revient à modéliser le profil topographique en supposant que $h = \alpha x + \beta$. Calculer le coefficient directeur α, l'ordonnée à l'origine β et le coefficient de corrélation r de la loi de régression, ainsi que les écart-types σ_α et σ_β. Que représente le coefficient directeur α dans ce cas précis ?

V.3.3.4. Représenter l'ensemble des résultats sur le graphe de la question V.3.3.1.

V.3.4 Distribution gaussienne de la taille de grains de sable

À faire avec une calculatrice graphique ou un ordinateur.
Les mesures répétées de phénomènes, dans la nature comme en laboratoire, se répartissent souvent suivant une distribution statistique, dite gaussienne, de la forme

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right], \tag{V.4}$$

où $\bar{x}$ est la valeur moyenne de la distribution et σ l'écart-type.

Une étude sur la taille moyenne des grains de sable d'une plage révèle qu'après collecte et tamisage, la taille moyenne des grains est de 500 µm. En considérant que $\bar{x} = 500$, tracer les courbes $y = f(x)$ avec x appartenant à $[0, 1000]$, pour $\sigma = 10, 50, 100, 250$ et 500. Commenter les changements de distribution lorsque la valeur de σ augmente.