Sismologie

Équation d'ondes dans un milieu isotrope

Équation de Navier et Cauchy

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

équivalent du second principe de Newton pour MC

Or $\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$

$$= \lambda \sum_l \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}.$$

cas isotrope

Ce qui donne $\rho \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \right)$

Pour $i = 1$ (dans la direction x_1)

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)}_{j=1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right]}_{j=2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \right]}_{j=3}$$

On rappelle que $\theta = \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}$

et comme λ et μ sont constants

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \overbrace{\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}}^{2\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}}$$

$$+ \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}$$

donc

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$+ \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\underbrace{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)}_{\theta = \mathrm{div}\, \underline{u} = \underline{\nabla}\cdot\underline{u}} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right)$$

idem pour $i=2$ et $i=3$

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot\underline{u}) + \mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

en associant les trois composantes

$$\rho\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u}) + \mu\nabla^2\underline{u}$$ laplacien vectoriel

or $\nabla^2\underline{u} = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u}) - \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{u})$ (voir feuille math 1)

donc on obtient $\rho\dfrac{\partial^2\underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u}) - \mu\,\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{u})$.

En divisant toute l'équation par ρ et en posant

$$\alpha^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho} \quad \text{et} \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

on a

$$\frac{\partial^2\underline{u}}{\partial t^2} = \alpha^2\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u}) - \beta^2\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{u}) \qquad (1)$$

On a déjà rencontré $\underline{\nabla}\cdot\underline{u}$ (divergence de $\underline{u}$) et on a introduit $\theta = \nabla\cdot\underline{u} = \dfrac{\Delta V}{V}$ (variations de volume)

On peut également introduire $\underline{V} = \mathrm{rot}\,\underline{u} = \underline{\nabla}\times\underline{u}$

Dans un système cartésien, $\underline{V} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{vmatrix}$ (voir cours rotationnel)

On peut aussi parfois rencontrer

$$V_i = \sum_j\sum_k \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

tenseur de Levi-Civita

Et finalement l'équation (1) devient

$$\boxed{\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \alpha^2 \underline{\nabla}\theta - \beta^2 \underline{\nabla} \times \underline{V}} \qquad (2)$$

α agit sur θ → variation de volume

β agit sur $\underline{V}$ → cisaillement (changement de forme sous variation de volume).

En 1829, s'appuyant sur le théorème d'Helmholtz, Poisson montra que n'importe quel vecteur déplacement $\underline{u}$ peut se décomposer grâce à deux potentiels :

- un potentiel scalaire ϕ
- un potentiel vecteur $\underline{\Psi}$

divergence nulle

tels que $\underline{u} = \nabla\phi + \underline{\nabla} \times \underline{\Psi}$ et $\underline{\nabla} \cdot \underline{\Psi} = 0$

En appliquant cette relation à l'eq (2) on peut écrire que

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \underline{\nabla} \cdot (\nabla\phi + \underline{\nabla} \times \underline{\Psi}) = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}\phi + \underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{\Psi}}_{=0 \text{ toujours}}$$

et $\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}\phi = \nabla^2\phi$ laplacien scalaire

donc $\theta = \nabla^2\phi$

Pour le rotationnel de $\underline{u}$ $\underline{\nabla} \times \underline{u} = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla}\phi + \underline{\nabla} \times \underline{\Psi})$

$$= \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{\Psi} \qquad \text{car } \underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\phi = 0$$

Comme $\underline{\nabla} \cdot \underline{\Psi} = 0$ on peut le rajouter et

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} = \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{\Psi} - \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{\Psi}) = -\nabla^2 \underline{\Psi}$$

laplacien vectoriel

donc $\underline{V} = -\nabla^2 \underline{\Psi}$

Il suffit donc maintenant de reprendre l'eq (2) et de calculer $\underline{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}\right)$ et $\underline{\nabla} \times \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}$.

Commençons par la divergence (dilatation / compression)

$$\underline{\nabla}\cdot \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \alpha^2\, \nabla\cdot(\underline{\nabla}\theta) - \beta^2 \underbrace{\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{V})}_{=0}$$

L'ordre des dérivées n'importe pas et $\nabla\cdot\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{u}}_{\theta})$

donc (2) devient

$$\boxed{\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \alpha^2\nabla^2\theta}$$

À une dimension cela s'écrirait $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ c'est l'équation différentielle d'un ressort.

La solution est de la forme $\theta(x,t) = A\exp[i(\omega t - kx)]$

c'est une onde de dilatation/compression se propageant à la vitesse α donc $\underline{\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}}$

C'est la vitesse des ondes P.

Passons au ~~différentiel~~ rotationnel

(2) $\rightarrow$ $\underline{\nabla}\times\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \alpha^2 \underbrace{\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\theta)}_{=0} - \beta^2\,\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{V})$

on obtient $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\underline{\nabla}\times\underline{u}) = -\beta^2\,\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{V})$ auquel on peut rajouter le terme $\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{V})$ car $=0$ car $\underline{V} = \underline{\nabla}\times\underline{u}$

et $\frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial t^2} = -\beta^2\, \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{V}) + \beta^2\,\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{V})$

et comme précédemment on obtient $\boxed{\frac{\partial^2\underline{V}}{\partial t^2} = \beta^2\,\underline{\nabla}^2\underline{V}}$

C'est une équation d'ondes propageant un cisaillement $\underline{V} = \underline{\nabla}\times\underline{u}$ à la vitesse $\underline{\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}}$

C'est la vitesse des ondes S.

sismologie cn 4

Milieu isotrope homogène

La démonstration de $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ (à 1D)

ou $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \theta$ (à 3D) avec $\theta = \nabla^2 \Phi$

d'un côté et de l'autre $\frac{\partial^2 \underline{\Psi}}{\partial t^2} = \beta^2 \underline{\nabla}^2 \underline{\Psi}$ avec

$\underline{V} = -\nabla^2 \underline{\Psi}$ a déjà été faite. (cf A_1, A_2)

On avait noté $\theta = \underline{\nabla}.\underline{u}$ divergence de $\underline{u}(\underline{x}, t)$

et $\underline{V} = \underline{\nabla} \times \underline{u}$.

Cela implique d'écrire $\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{\nabla}\Phi + \underline{\nabla} \times \underline{\Psi}$ analogie $\underline{E}$ et $\underline{B}$?

deux potentiels.

Et finalement $\alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ et $\beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$

Dans les deux cas on a des équations de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$ à 1D.

f est une fonction de x_1, t $f(x_1, t)$

Équation différentielle (aux dérivées partielles) à coeff constant

↳ ressort $\underline{F} = -k x_1$ k constante raideur

On peut facilement montrer que $f(x, t) \simeq \exp[i(\omega t - k x_1)]$

(grâce à la propriété des fonctions périodiques)

on a $\frac{\partial f}{\partial t} = i\omega \exp[i(\omega t - k x_1)]$

et donc $$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 \exp[i(\omega t - k x_1)]$$
$$= -\omega^2 f(x_1, t)$$

Pour la dérivée spatiale

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -ik \exp[i(\omega t - kx_1)]$$

donc $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -k^2 \exp[i(\omega t - kx_1)]$$

$$= -k^2 f(x_1, t)$$

$$\hookrightarrow \quad f(x_1,t) = -\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

et donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2\left(-\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$ ce qui est vrai si $c^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$

soit $c = \sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}} = \frac{\omega}{k}$ quelle dimension pour c ?

ωt et kx_1 sont sans dimension

donc $\omega \propto [T^{-1}]$ et $k \propto [L^{-1}]$

$$\frac{\omega}{k} \propto \left[\frac{L}{T}\right]$$ c'est une vitesse

c est la célérité de l'onde $f(x_1,t)$

Dans notre cas on a donc que $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Sont les vitesses de deux ondes qui explique la même équation - deux solutions car 2 types de déformations possibles θ et $\underline{V}$

dilatation et cisaillement

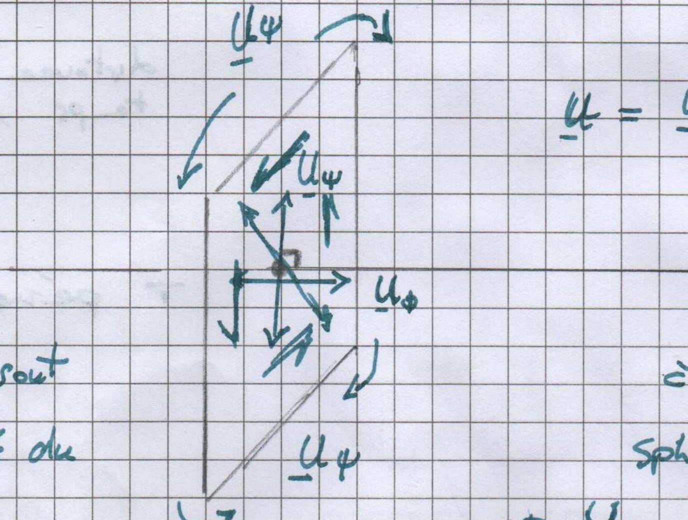
α est la vitesse des ondes P on a aussi $\alpha = \sqrt{\dfrac{K+\frac{4}{3}\mu}{\rho}}$

et β la vitesse des ondes S

⚠ il y a du cisaillement dans les ondes P.

↳ on peut confondre son vitesse acoustique $\alpha = \sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$

dans l'air ou l'eau → liquide



x_1

$$\underline{u} = \underline{u}_\phi + \underline{u}_\psi = \underline{\nabla}\phi + \underline{\nabla}\times\underline{\psi}$$

⚠ α et β sont des propriétés du milieu.

à 3D $\underline{u}_\phi$ forme une sphère dilate/comprime et $\underline{u}_\psi$ des mouvements de torsion → fonctions propres / modes propres.

Analyse d'une onde

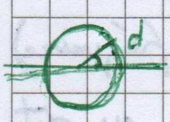
Si $f(x_1, t) = \exp\left[i(\omega t + kx_1)\right]$ on peut écrire que $f(x_1, t) = A \exp\left[i(\omega t - kx_1 + d)\right]$

A serait alors l'amplitude de l'onde

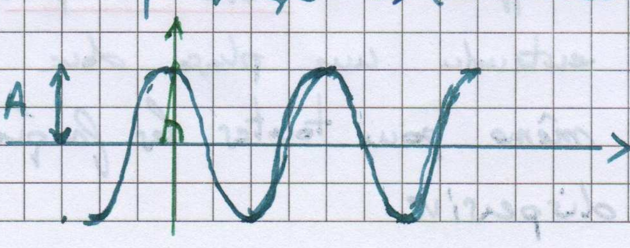
ω la pulsation ou la fréquence

k le nombre d'onde

d déphasage → (comment est l'onde à $t=0$? et $x=0$)

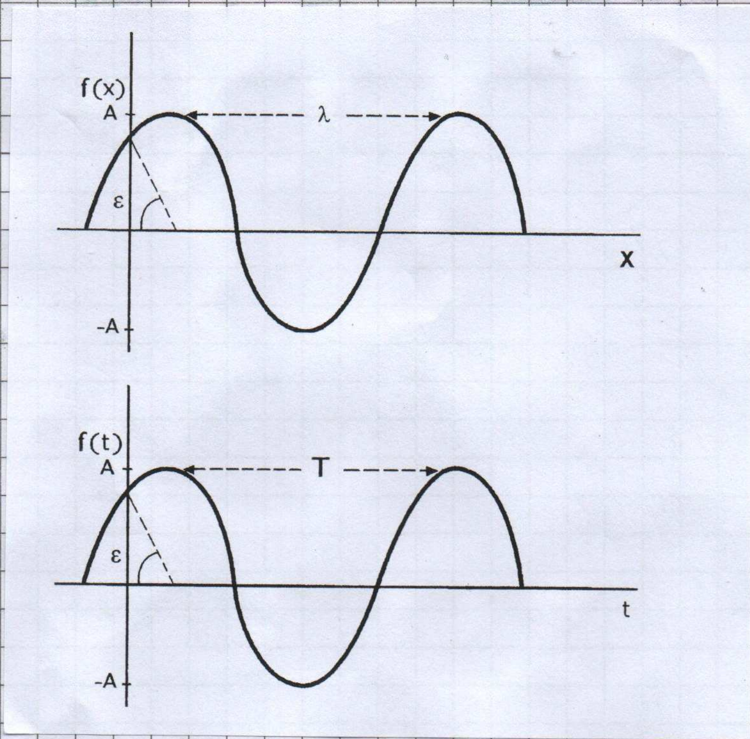


d est un angle



pour avoir d il faut poser l'origine

Onde : propagation d'énergie à travers un milieu qui dépend donc du temps et de l'espace



λ longueur (m) d'onde

distance / temps) mis pour que le phénomène revienne identique

T période (s)

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ nb de tours/s ($rad.s^{-1}$) pulsation fréquence angulaire

mais $\nu = \frac{1}{T}$ fréquence nb de fois/s

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ nombre d'onde à 3D $\underline{k}$ est un vecteur et k est alors la norme.

ω définit que le phénomène se reproduit tous les T(s),

k définit que le phénomène se reproduit tous les λ (m),

$c = \frac{\omega}{k}$ ils sont reliés par ce qu'on appelle la vitesse de phase (sous-entendu une phase donc une fréquence)

Si c n'est pas la même pour toutes les fréquences, on dit que l'onde est dispersive

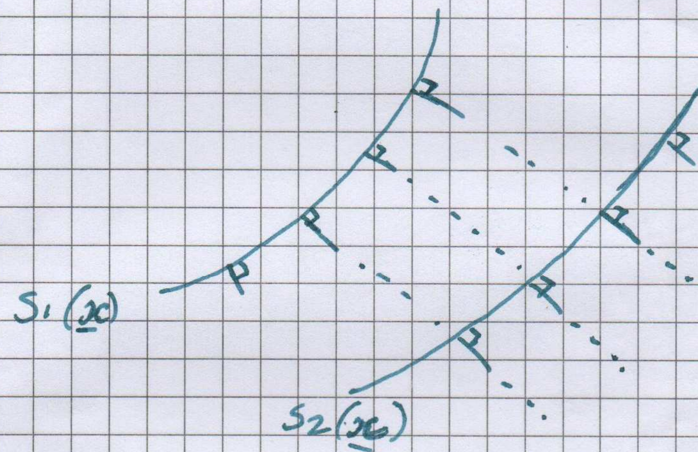
La position $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ du premier mouvement occasionné par l'onde (car en plus elle s'atténue ...) est ~~dite~~ un point front d'onde.

Le front d'onde est donc la surface définie pour tous ses points $S(\underline{x}) = S(x_1, x_2, x_3)$

on peut écrire $f(\underline{x}, t) = A \exp[i(\omega t - k S(\underline{x}) + \alpha)]$

Prendre l'exemple d'une onde dans l'eau

À deux instants t_1 et t_2 $\rightarrow$ $S_1(\underline{x})$ et $S_2(\underline{x})$

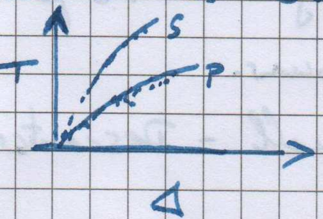


Le vecteur unitaire normal en un point d'un front d'onde définit la direction du rai $\underline{k}$
vecteur d'onde

C'est localement la direction de la propagation de la déformation (polarisation) qui ~~touche~~ affecte le bout de matière (élément de volume) touché par le front d'onde à cet instant

5. Théorie des rais

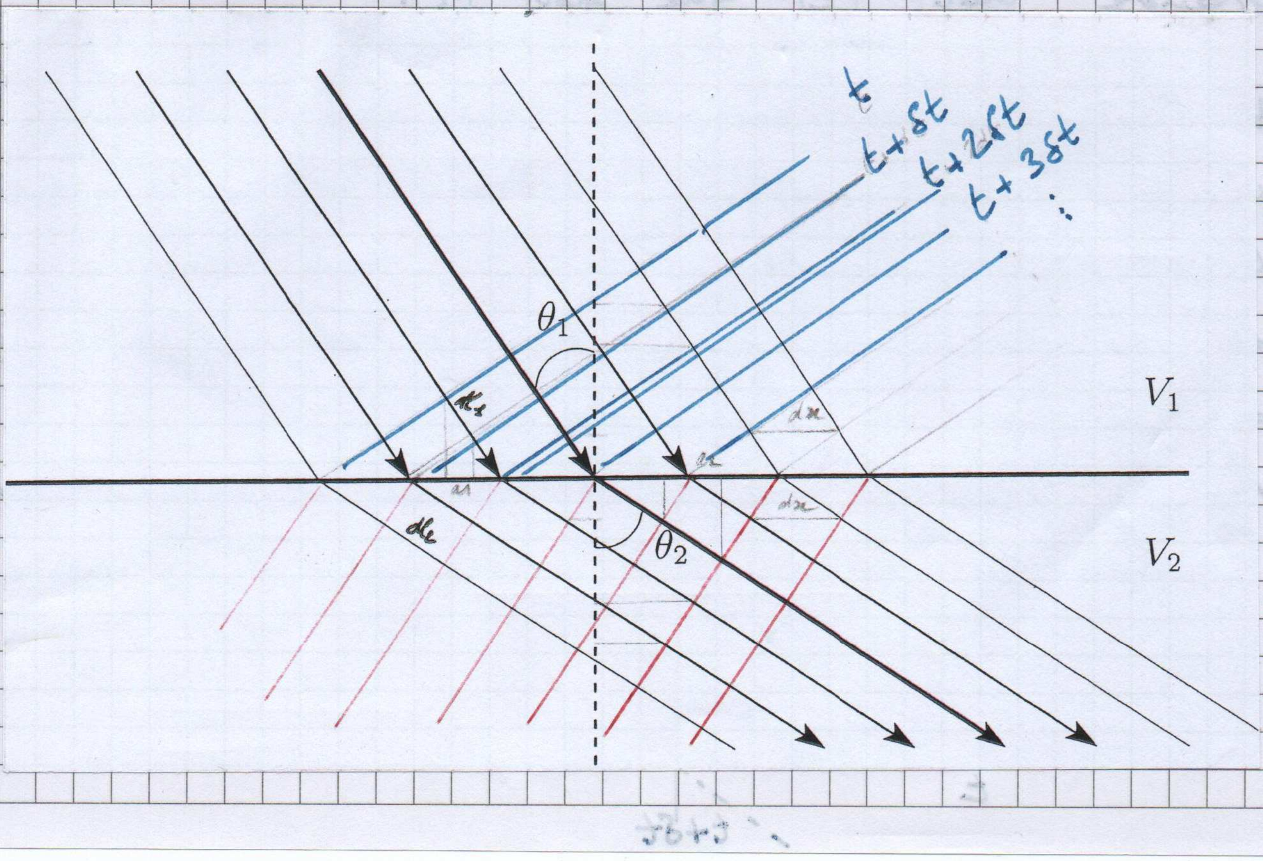
La théorie des rais en sismologie est analogue à la théorie des rais en optique. Elle permet d'expliquer une très grande partie des observations sismologiques :



- À l'échelle globale
- À l'échelle locale (exploration géophysique)
  - → sismique réfraction
  - → sismique réflexion

La théorie des rais en sismologie est également utilisée pour la localisation des tremblements de terre, la détermination des mécanismes au foyer et les inversions pour déterminer les propriétés physiques de l'intérieur de la Terre. ⚠ approximation haute fréquence (P, S ok autres phases ~)

5.1. Loi de Snell-Descartes, paramètre de rai



⚠ en coordonnées cartésiennes ! (on verra les sphériques après).

comme on a pu le voir au TD la loi de Snell-Descartes est équivalente au principe de Fermat qui stipule que l'énergie se propage le long du trajet qui minimise le temps de parcours.

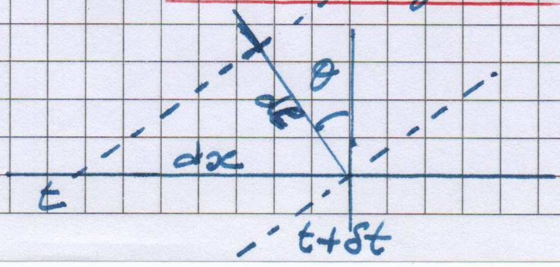
Snell - Descartes $$\frac{\sin \theta_1}{V_1} = \frac{\sin \theta_2}{V_2} \quad (5.1)$$

Cela équivaut à écrire que si on définit $p = \frac{\sin i}{V}$ (5.2) alors p est constant le long du rai

Si on trace les différents fronts d'ondes dans la figure précédente ils sont plus resserrés dans ① et plus espacés dans ② ⟹ l'onde se propage donc plus vite dans ② Pourquoi? Pour un même δt (par ex: toutes les secondes) la distance entre deux front d'ondes est plus grande dans ② (rouge) que dans ① (bleu).

À l'interface on comprend bien que la quantité qui se conserve est la distance horizontale entre deux fronts d'ondes - C'est la seule manière de raccorder les fronts d'ondes dans ① et ② au niveau de l'interface.

⚠ ce n'est pas la projection sur l'interface mais bien la distance horizontale entre deux fronts d'onde.



On comprend alors que dx est la distance entre les intersections des fronts d'onde à t et $t+\delta t$ et l'interface. Vitesse de propagation $V = \frac{dl}{dt}$

$$\text{et} \quad \sin\theta = \frac{dl}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

En éliminant dl des deux équations on obtient

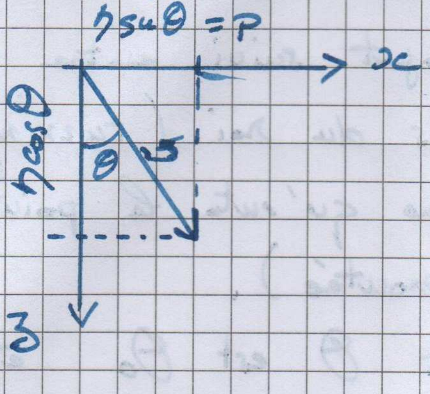
$$\sin\theta = \frac{V\delta t}{dx} \longrightarrow dx = \frac{V}{\sin\theta}\,\delta t$$

À l'interface comme dans le milieu ①, comme dans le milieu ② dx est la même.

$$dx = \frac{V_1}{\sin\theta_1}\,\delta t = \frac{V_2}{\sin\theta_2}\,\delta t$$

On retrouve bien $\frac{\sin\theta_1}{V_1} = \frac{\sin\theta_2}{V_2}$. Cette quantité est propre au rai (et unique), c'est le paramètre de rai $p = \frac{\sin\theta}{V}$. (5.3)

On le note parfois $p = \eta \sin\theta$ où η est la lenteur



le vecteur $\underline{\eta}$ lenteur a le m̂ sens que $\underline{V}$ la vitesse mais $\eta = \frac{1}{V}$ (s/km)

p est alors la projection de la lenteur $\underline{\eta}$ sur l'axe des x d'où son nom de lenteur horizontale

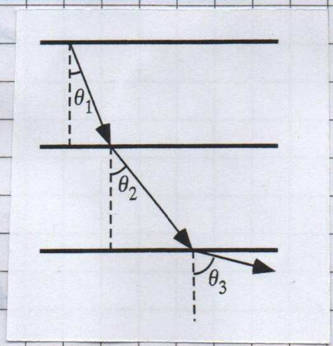
la lenteur verticale $\eta\cos\theta = \sqrt{\eta^2 - p^2}$

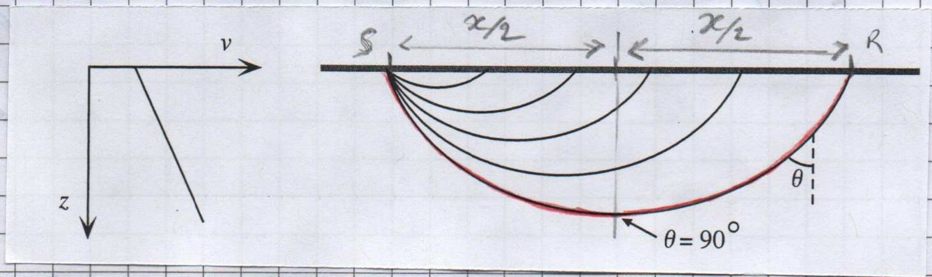
De plus $\boxed{p = \frac{\delta t}{\delta x}}$ c'est la dérivée du temps de parcours par rapport à δx. (5.4)

Pour une hodochrone $t(x)$ c'est donc la valeur de la tangente en un x donné.

Ce qui est logique puisque pour chaque x (ie chaque couple source – récepteur) il y a un rai donc un seul paramètre de rai.

5.2 Tracés de rais dans des modèles latéralement homogènes





Quand une onde P ou S se propage dans un milieu on peut toujours considérer que localement il s'agit d'une succession de fines couches. Comme le milieu est latéralement homogène, le trajet suivi entre la surface et le point le plus bas du rai (turning point) est symétrique et donc le même qu'entre le point bas et la surface (dans le sens montée).

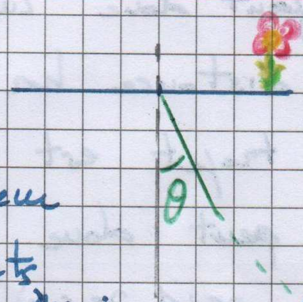
À la source l'angle de départ θ est θ_0 et au niveau du point bas il vaut $\frac{\pi}{2}$.

Comme $p = \eta \sin\theta$ on comprend pourquoi on l'appelle parfois lenteur horizontale car quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, $p = \eta$.

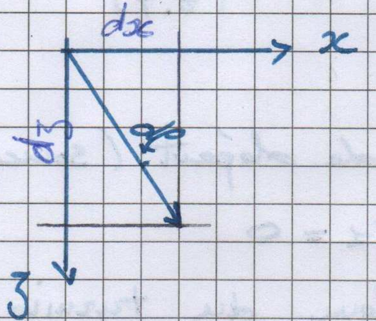
Pour le rai rouge la distance horizontale totale x

peut se décomposer en deux moitiés identiques.
C'est évidemment vrai pour les autres rais mais x diffère.

⚠ θ est l'angle par rapport à la normale à la surface donc la verticale.



Si on appelle dl, l'élément de longueur d'un rai parcouru entre deux instants
(c'est un vecteur mais on parle ici de sa norme)



$$\frac{dx}{dl} = \sin\theta$$

$$\frac{dz}{dl} = \cos\theta = \left(1 - \sin^2\theta\right)^{1/2}$$

Puisque $p = \eta \sin\theta$ on a $\frac{dx}{dl} = \frac{p}{\eta}$ et

$$\frac{dz}{dl} = \left(1 - \frac{p^2}{\eta^2}\right)^{1/2}$$ qui peut également s'écrire

$$\frac{dz}{dl} = \frac{1}{\eta}\left(\eta^2 - p^2\right)^{1/2} \qquad (5.5)$$

Arriver à tracer les rais dans ce type de modèles (latéralement homogènes) revient à déterminer la « trajectoire » donc exprimer x en fonction de z.

En introduisant les dérivées partielles $\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{dl}\frac{dl}{dz}$

donc $\frac{dx}{dz} = \frac{p}{\eta}\frac{\eta}{(\eta^2-p^2)^{1/2}}$ soit $dx = dz\,\frac{p}{\eta}\frac{\eta}{(\eta^2-p^2)^{1/2}}$

et finalement $$dx = \frac{p}{(\eta^2 - p^2)^{1/2}} dz \quad (5.6)$$

Il faut donc intégrer cette équation pour trouver x la distance horizontale. En utilisant le fait que le trajet est symétrique par rapport au turning point on peut donc d'abord écrire que

$$x(z_1, z_2, p) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{p}{(\eta^2 - p^2)^{1/2}} dz \quad (5.7)$$

avec z_1 la profondeur du point de départ (source) que l'on prend ici à 0 $z_1 = 0$

et on appelle z_p la profondeur du turning point. (celle où $\eta = p$) et comme en plus p est constant ou a alors

$$\frac{1}{2} x(p) = p \int_0^{z_p} \frac{dz}{(\eta^2 - p^2)^{1/2}} \quad (5.8)$$

soit finalement $$x(p) = 2p \int_0^{z_p} \frac{dz}{(\eta(z)^2 - p^2)^{1/2}} \quad (5.9)$$

Au passage on rappelle ici que la lenteur η dépend de $z \rightarrow \eta(z)$. ce qui st normal car la vitesse dépend de z.

On retrouve l'éq (2.2) du TD 2 (gauche) avec η. Dans l'énoncé la lenteur st notée u ce qui était une mauvaise idée.

5.3 Temps de trajets dans des modèles latéralement homogène.

De manière similaire, on peut s'intéresser maintenant au temps de parcours.

Si η est la lenteur $\eta = \dfrac{dt}{dl}$, $dt = \eta \, dl$

or $$\frac{dt}{dz} = \frac{dt}{dl}\frac{dl}{dz} = \frac{\eta^2}{(\eta^2 - p^2)^{1/2}} \quad (5.10)$$ on reprend éq (5.5)

Pour les mêmes raisons que précédemment on a le temps total

$$\boxed{T(p) = 2\int_0^{z_p} \frac{\eta^2(z)\, dz}{(\eta^2(z) - p^2)^{1/2}}} \quad (5.11)$$

Ce sont les deux équations qui permettent de tracer les rais et de calculer les temps de propagation.

Pour ceux qui veulent savoir comment on résoud ces équations dans un cas simple (cf. TD 2) lire ci-dessous, les autres peuvent aller directement au 5.5.

5.4 Cas d'un modèle pour lequel V croît linéairement

Comme dans le TD 2 on suppose que $V(z) = a + bz$

donc $\eta(z) = \dfrac{1}{a+bz}$ (c'est l'inverse de la vitesse)

On repart de l'éq. (5.7) et on exprime x comme une primitive

$$x(p,z) = \int_0^z \frac{p}{(\eta^2 - p^2)^{1/2}} du$$ officiellement on doit utiliser la variable u car z est dans la borne

mais on écrira plus simplement

$$x(p,z) = \int \frac{p\,dz}{(\eta^2 - p^2)^{1/2}}$$. Pour déterminer

cette intégrale on va se servir de la relation entre θ (l'angle d'incidence) et z.

On sait que $p = \eta \sin\theta$

donc $\eta^2 - p^2 = \eta^2 - \eta^2 \sin^2\theta = \eta^2(1 - \sin^2\theta)$

$= \eta^2 \cos^2\theta$

et donc $\dfrac{1}{(\eta^2 - p^2)^{1/2}} = \dfrac{1}{\eta\cos\theta}$. (5.12)

Il reste maintenant à travailler sur dz, pour cela on écrit que $p = c^{ste}$ donc $dp = 0$ (différentielle de p)

Si $p = \eta \sin\theta$ alors $dp = d(\eta \sin\theta)$

soit $dp = \sin\theta\, d\eta + \eta\, d\sin\theta = 0$

Comment trouver $d\eta$ et $d\sin\theta$?

$d\sin\theta = \cos\theta\, d\theta$ ok

$d\eta = d\left(\frac{1}{v}\right) = d\left(\frac{1}{a+bz}\right)$ $\qquad d\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{-df}{f^2}$

avec ici $f = a + bz \rightarrow df = b\,dz$

donc $d\eta = \dfrac{-b\,dz}{(a+bz)^2} = -\eta^2 b\,dz$

on peut maintenant utiliser $dp = 0$

et donc $0 = -\sin\theta\, \eta^2 b\,dz + \eta\cos\theta\, d\theta$

soit $b\underbrace{\eta\sin\theta}_{p}\,dz = \cos\theta\, d\theta$

et donc $dz = \dfrac{\cos\theta\, d\theta}{pb}$.

Il ne reste plus maintenant qu'à mettre tout le monde dans l'intégrale.

$$x = \int \underbrace{\eta \sin\theta}_{p} \; \underbrace{\frac{1}{\eta\cos\theta}}_{\frac{1}{(\eta^2-p^2)^{1/2}}} \; \underbrace{\frac{\cos\theta}{pb}\, d\theta}_{dz}$$

et finalement $\boxed{x = \frac{1}{pb}\int \sin\theta\, d\theta}$ c'est beau non ?

et en intégrant on obtient

$$x = -\frac{1}{pb}\cos\theta + K$$

il faut maintenant revenir en z.

comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\cos\theta = \pm\left(1-\sin^2\theta\right)^{1/2} = \pm\left(1-\frac{p^2}{\eta^2}\right)^{1/2}$$

donc $\cos\theta = \pm\left(1-p^2(a+bz)^2\right)^{1/2}$

et c'est pour cela que $x = \pm\frac{1}{pb}\left[1-(pbz+pa)^2\right]^{1/2} + K$

On choisit la solution $-$ pour aller dans le bon sens mais les deux sont bonnes.

$$x(p,z) = K - \frac{1}{pb}\left[1-\left(pb\left(z+\frac{a}{b}\right)\right)^2\right]^{1/2}$$

petits réarrangements...

$$x(p,z) = K - \frac{1}{pb}\left[p^2b^2\left(\frac{1}{p^2b^2}-\left(z+\frac{a}{b}\right)^2\right)\right]^{1/2}$$

et enfin

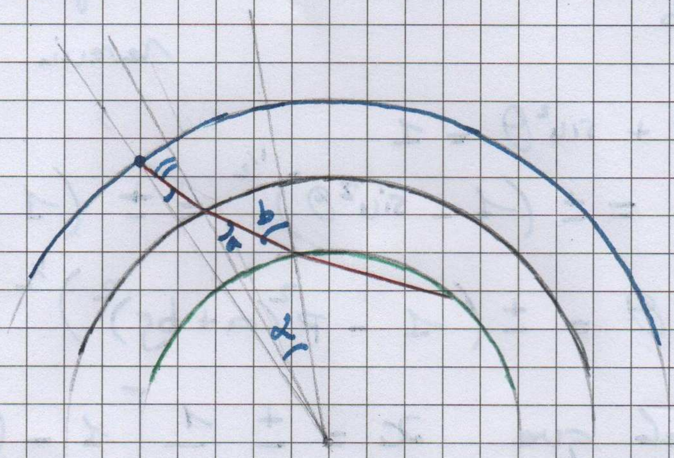
$$x(p,z) = K - \left[\frac{1}{p^2b^2}-\left(z+\frac{a}{b}\right)^2\right]^{1/2}$$

Cette démonstration est importante car mis à part les derniers développements de la fin pour arriver à l'équation d'un cercle on voit que l'on résoud l'intégrale en faisant intervenir l'angle θ.

L'angle que fait le rai avec la verticale dépend du modèle de vitesse. Au point le plus bas $\theta = \frac{\pi}{2}$.

5.5 Coordonnées sphériques

On va retrouver le même genre d'équations avec la différence que le paramètre de rai prend une autre forme



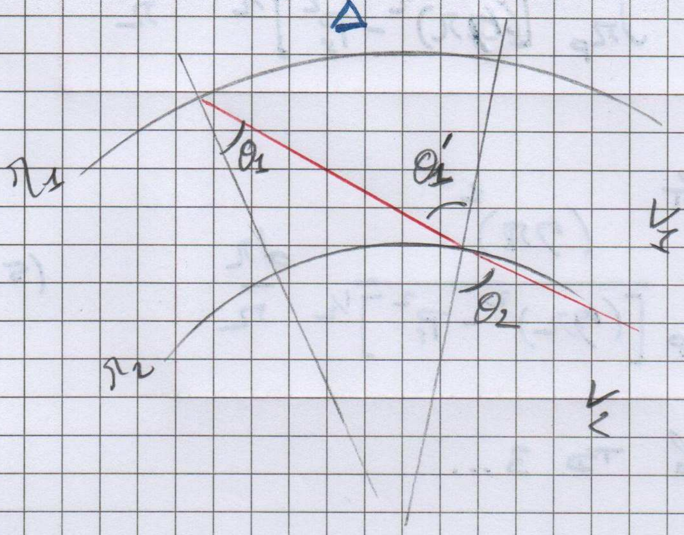
En raison de la différence de rayon l'angle θ n'est pas constant dans chaque couche. par exemple $a \neq b$

Si on revient à la seule quantité qui est preservée c'est la longueur horizontale donc ici $r\alpha$ avec α l'angle au centre c'est pour cela que le paramètre de rai s'écrit $\boxed{p_s = \frac{r \sin\theta}{V}}$

On le note p_s pour le distinguer avec p (cartésien)

La loi de Snell - Descartes devient alors

$$\frac{r_1 \sin\theta_1}{V_1} = \frac{r_2 \sin\theta_2}{V_2} \qquad (5.12)$$



Si le rai est dans la couche V_1 on a

$$r_1 \sin\theta_1 = r_2 \sin\theta_1'$$

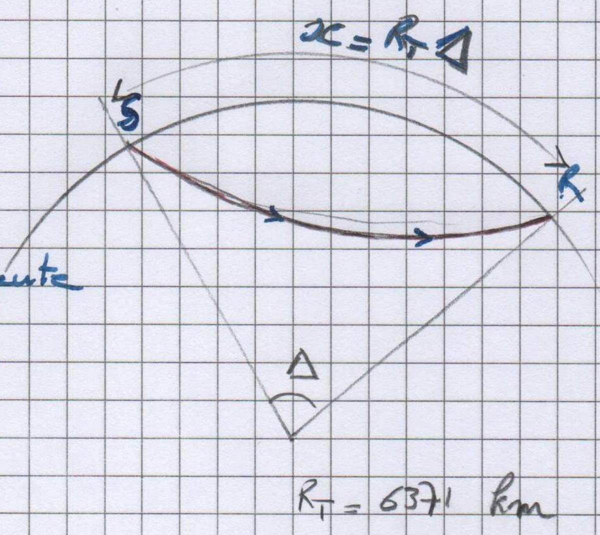
et si le rai change de milieu $V_1 \rightarrow V_2$

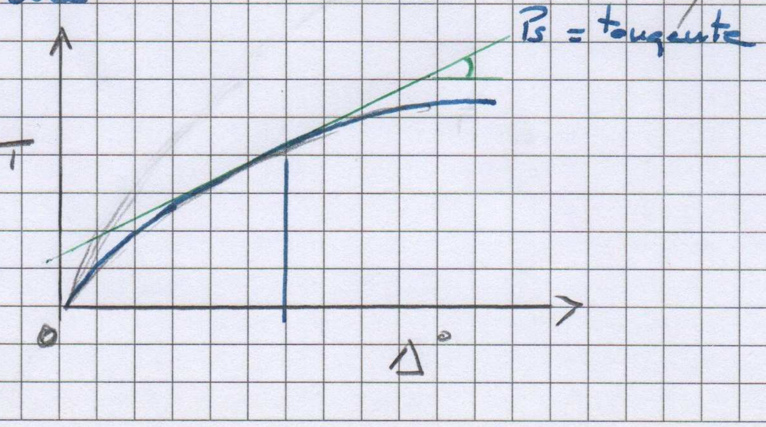
$$\frac{\sin\theta_1'}{V_1} = \frac{\sin\theta_2}{V_2}$$

Si on note Δ la distance épicentrale (c'est à dire la distance horizontale à la surface de la Terre), on a

$$p_s = \frac{r\,dT}{dx} = \frac{dT}{d\Delta}$$

c'est la dérivée d'une hodochrone globale





Les équations (5.9) et (5.11) deviennent alors

$$\boxed{\Delta(p_s) = 2\,p_s \int_{r_p}^{R_T} \frac{1}{\left[(\eta r)^2 - p_s^2\right]^{1/2}} \frac{dr}{r}} \qquad (5.13)$$

et

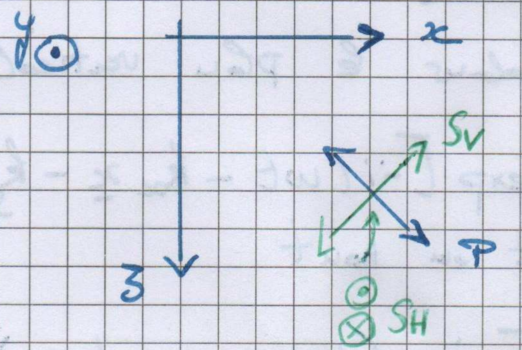
$$\boxed{T(p_s) = 2 \int_{r_p}^{R_T} \frac{(\eta r)^2}{\left[(\eta r)^2 - p_s^2\right]^{1/2}} \frac{dr}{r}} \qquad (5.14)$$

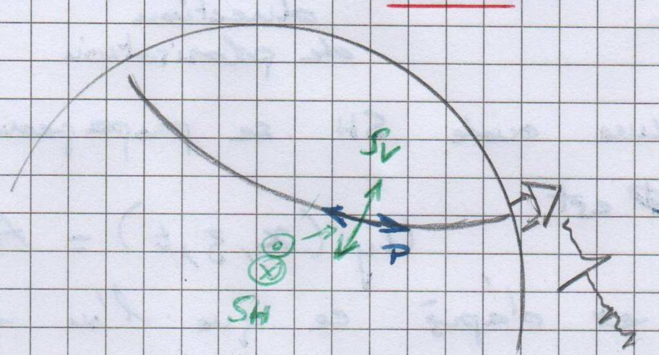
La suite dans le TD 3...

Réflexion et transmission

Nous avons vu que la théorie des rais permettait de tracer les rais (trajets suivis par les ondes) en fonction du modèle. Nous n'avons pas encore parlé de l'amplitude de l'onde et donc de l'énergie.

Tout le raisonnement sera fait sur une onde **SH** et ensuite on généralisera au cas **P-SV**.



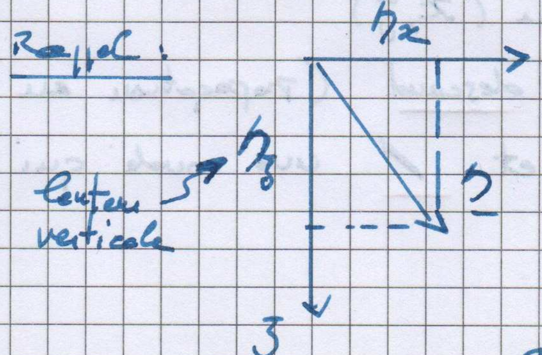


SV est l'onde S polarisée dans le plan vertical et SH est l'onde S polarisée horizontalement.

Dans un repère cartésien x, y, z – si l'onde P se propage dans le plan vertical (x,z) alors :

- la polarisation de P est dans le plan vertical
- l'onde SV se propage et est polarisée dans le plan vertical
- l'onde SH se propage dans le plan vertical mais est polarisée suivant y

Rappel :



La lenteur est un vecteur dirigé dans la même direction que la vitesse $\underline{V}$. Il se projette en $(\eta_x, 0, \eta_z)$ et $\eta_x = p$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $\underline{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$; comme $\lambda = cT$

on a $\underline{k} = \frac{\omega}{c}$ soit $\underline{k} = \underline{p}\,\omega$. $\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

Donc si une onde (au sens général) s'écrit

$$\underbrace{\underline{u}(x,y,z,t) = \underline{A}}_{\text{direction de polarisation}} \exp\left[-i(\underbrace{\omega}_{\text{fréquence de l'onde}} t - \underbrace{\underline{k}}_{\text{direction de propagation}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})\right],$$

une onde SH se propageant dans le plan vertical (x,z) est

$$U_y(x,z,t) = A_y \exp\left[-i(\omega t - k_x x - k_z z)\right]$$

et d'après ce que l'on écrit en haut

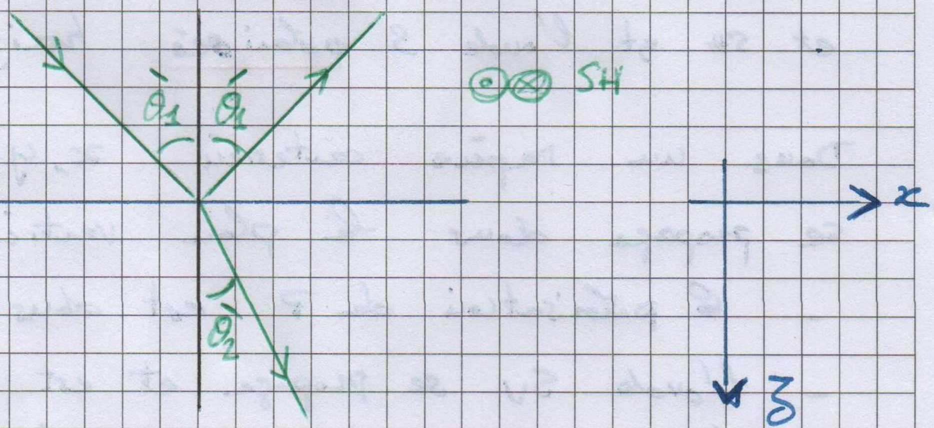
$$U_y(x,z,t) = A_y \exp\left[-i\omega(t - px - p_z z)\right]$$

① (β_1)

interface

② (β_2)

ici $\beta_2 < \beta_1$



La polarisation de SH est bien suivant y mais sa direction de propagation est dans le plan (x,z)

on note $\searrow$ une onde qui descend (propagation en direction des z positifs) et $\nearrow$ une onde qui monte (z négatifs).

la loi de Snell-Descartes est toujours valable. ~~car~~

si β_1 est la vitesse des ondes S dans le milieu (1)

et β_2 ——————————— S dans le milieu (2)

donc si $\eta_1 = \frac{1}{\beta_1}$ et $\eta_2 = \frac{1}{\beta_2}$ on a

$$\eta_1 \sin \grave{\theta}_1 = \eta_1 \sin \acute{\theta}_1 = \eta_2 \sin \grave{\theta}_2$$

Ceci permet de dire que $\grave{\theta}_1 = \acute{\theta}_1$ et

$$\grave{\theta}_2 = \arcsin\left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \grave{\theta}_1\right)$$

De plus si une onde SH descend on aura

$$u_y(x, z, t) = A_y \exp\left[-i\omega(t - px - \eta_z z)\right]$$

alors que si elle monte,

$$u_y(x, z, t) = A_y \exp\left[-i\omega(t - px + \eta_z z)\right].$$

Au niveau de l'interface $(z = 0)$ on a donc

dans le milieu (1)

$$u_{y1} = \grave{A}_1 \exp\left[-i\omega(t - px)\right] + \acute{A}_1 \exp\left[-i\omega(t - px)\right]$$

et dans le milieu (2)

$$u_{y2} = \grave{A}_2 \exp\left[-i\omega(t - px)\right]$$

On considère une interface entre deux milieux solides (sinon pas d'ondes S, ça serait dommage ;-)

→ continuité du déplacement $u_{y1} = u_{y2}$

→ continuité de la traction $t_{z1} = t_{z2}$

Pour le déplacement on a immédiatement $\grave{A}_1 + \acute{A}_1 = \grave{A}_2$

Donc si on pose que $\grave{A}_1 = 1$,

$$\boxed{1 + \acute{A}_1 = \grave{A}_2} \qquad (1)$$

Reste à travailler sur la traction qui s'exerce sur la surface ~~(y,z)~~ (x,y) donc orthogonale à z.

$$\underline{t}_z = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

et on se place dans un milieu isotrope donc

$$\tau_{ij} = \lambda\theta\,\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij} \qquad \text{(voir cours précédents)}$$

la seule contrainte non nulle est τ_{yz},

$$\boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial z}.}$$

Il suffit donc de dériver u_y par rapport à z

onde descendante (down going) $\tau_{yz} = -\mu\,\eta_z\,\grave{A}\exp[-i\omega(t - px - \eta_z z)]$

onde montante (up going) $\tau_{yz} = +\mu\,\eta_z\,\acute{A}\exp[-i\omega(t - px + \eta_z z)]$

<u>Au niveau de l'interface</u> $z = 0$

dans le milieu ① $\tau_{yz_1} = -(\grave{A}_1 - \acute{A}_1)\,\mu_1\,\eta_{z1}\exp[-i\omega(t - px)]$

② $\tau_{yz_2} = -\grave{A}_2\,\mu_2\,\eta_{z2}\exp[-i\omega(t - px)]$

Si $\tau_{yz_1} = \tau_{yz_2}$ on a $(\grave{A}_1 - \acute{A}_1)\,\mu_1\,\eta_{z1} = \grave{A}_2\,\mu_2\,\eta_{z2}$

En posant que $\grave{A}_1 = 1$, on a

$$\boxed{(1 - \acute{A}_1)\,\mu_1\,\eta_{z1} = \grave{A}_2\,\mu_2\,\eta_{z2}} \qquad (2)$$

En utilisant l'éq (1) dans (2) on obtient

$$(1 - \acute{A}_1)\mu_1 \eta_{3_1} = (1 + \acute{A}_1)\mu_2\eta_{3_2}$$

soit
$$\acute{A}_1 = \frac{\mu_1 \eta_{3_1} - \mu_2 \eta_{3_2}}{\mu_1 \eta_{3_1} + \mu_2 \eta_{3_2}} \quad (3)$$

et on l'amplitude de l'onde transmise dans le milieu (2)

$$\grave{A}_2 = \frac{2\mu_1 \eta_{3_1}}{\mu_1 \eta_{3_1} + \mu_2 \eta_{3_2}} \quad (4)$$

Ondes SH vitesse $\beta = \frac{1}{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

donc $\eta_3 = \eta \cos\theta = \frac{\cos\theta}{\beta}$ et $\beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$

ce qui permet d'écrire que $\mu_1 \eta_{3_1} = \rho_1 \beta_1 \cos\theta_1$

et $\mu_2 \eta_{3_2} = \rho_2 \beta_2 \cos\theta_2$

Et finalement

$$\grave{S}\acute{S} = \frac{\rho_1 \beta_1 \cos\theta_1 - \rho_1 \beta_1 \cos\theta_2}{\rho_1 \beta_1 \cos\theta_1 + \rho_2 \beta_2 \cos\theta_2}$$

et

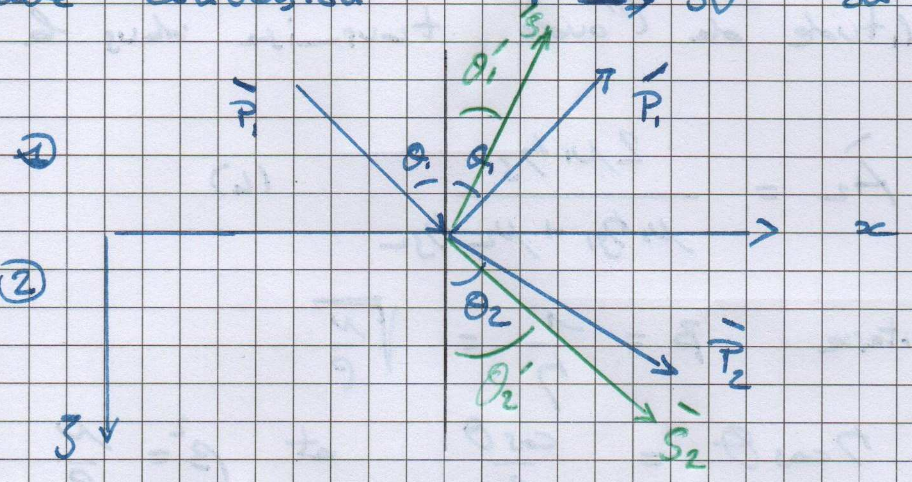
$$\grave{S}\grave{S} = \frac{2\rho_1 \beta_1 \cos\theta_1'}{\rho_1 \beta_1 \cos\theta_1 + \rho_2 \beta_2 \cos\theta_2}.$$

Ces relations expliquent comment l'énergie se dissipe et créé des onde réflechies et refractés.

Pour le cas des ondes P et SV les choses sont plus compliquées.

Dans le plan vertical (x, z) les ondes P et SV sont toutes les deux polarisées dans ce plan également.

Quand il faut faire des bilans d'énergie au passage d'une interface il faut donc prendre en compte une conversion $P \rightarrow SV$ ou $SV \rightarrow P$.

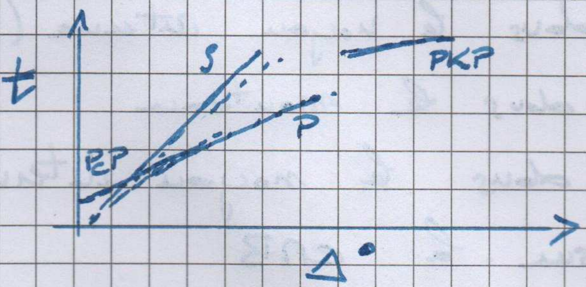


C'est pour cela qu'en traversant le noyau liquide les ondes SH disparaissent, les ondes SV se convertissent en ondes P.

Puis en rentrant dans la graine $P \rightarrow SV$

Nomenclature

La théorie des rais implique que chacune des arrivées d'ondes doit trouver sa place dans un schéma global
→ hodochrone.



Ces portions de courbes portent le nom de « phase » ou « branche »

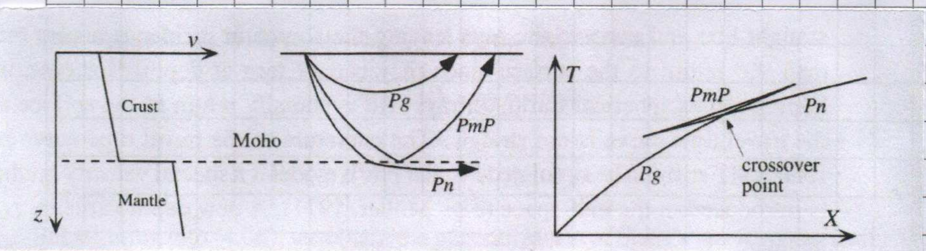
⚠ Théorie des rais <=> signal balistique (ie 1ère arrivées)

Croûte océanique ép. 6-10 km
continentale ép. 30-50 km

La lettre « g » est réservé par les ondes se propageant dans la croûte Pg Sg

La lettre « m » sert à indiquer qu'il y a réflexion sur le Moho PmP, PmS, SmS ...

La lettre « n » indique une onde réfractée sous le moho (angle de réfraction > $\frac{\pi}{2}$; voir α2)
2.4 et 2.6



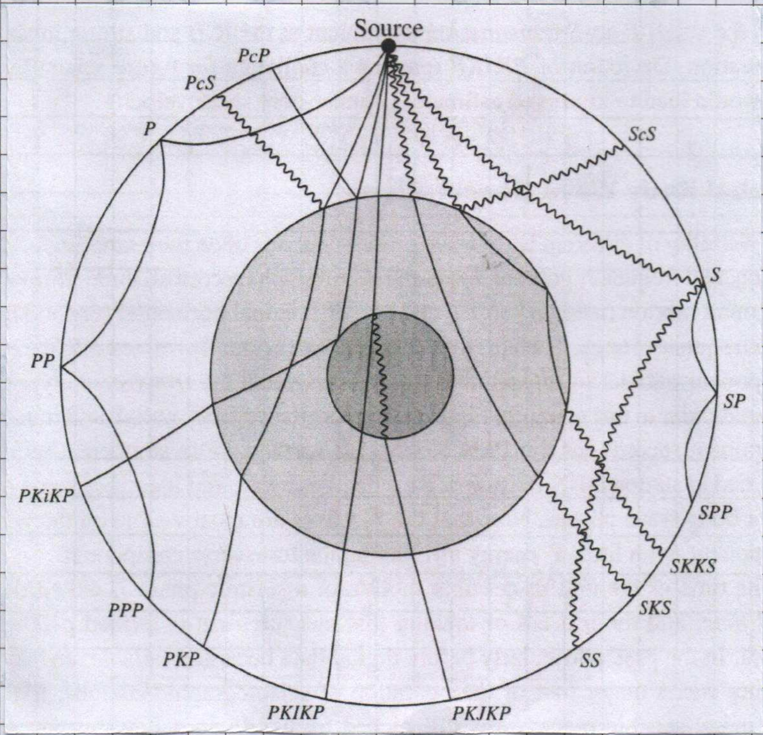
Sur les hodochrones il y a une triplication
→ pour qqs valeurs de X
il peut y avoir 3 arrivées d'onde P : Pg, Pn, PmP
ou Pn, Pg, PmP

L'onde Pn arrive donc avant Pg à partir d'une certaine distance.

À l'échelle globale il faut bien distinguer les ondes P et S car interactions P, SV.

P : ondes P dans le manteau
K : ondes P dans le noyau externe (liquide)
I : ondes P dans le noyau interne (solide)
S : ondes S dans le manteau
J : ondes S dans le noyau interne (solide)
c : reflexion sur la CMB
i : reflexion sur la ICB

Pour les sources profondes les ondes qui remontent sont notées avec des minuscules pP, sS, sP ...
(deep quakes)



exo
Dessiner SKIKP, ScP, pPP, PKJKS