Soit ϕ, un champ scalaire (ou fonction scalaire),
$\phi = \phi\,(x_1, x_2, x_3)$. ex : température, masse

Soit $\mathbf{V}$, un champ vectoriel (ou fonction vectorielle),
$\mathbf{V} = V_1(x_1, x_2, x_3)\,\hat{\mathbf{e}}_1 + V_2(x_1, x_2, x_3)\,\hat{\mathbf{e}}_2 + V_3(x_1, x_2, x_3)\,\hat{\mathbf{e}}_3$. ex : vitesse, force, accélération

grad

$$\overrightarrow{grad}\ \phi = \boldsymbol{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,\hat{\mathbf{e}}_i.$$

div *rot*

$$div\ \mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}.$$

$$\overrightarrow{rot}\ \mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Théorème de Gauss (divergence)
$$\iint_S \mathbf{V}\cdot\vec{n}dS = \iiint_\tau \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}d\tau.$$

Théorème de Stokes (rotationnel)
$$\oint_C \mathbf{V}\cdot\vec{d\mathrm{l}} = \iint_S \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}\cdot\vec{n}dS.$$

div *rot*

$$div(\overrightarrow{grad}\ \phi) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi, \quad = \Delta\phi, \quad = \boldsymbol{\nabla}^2\phi, \quad = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}.$$

Laplacien scalaire

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\ \phi) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi, \quad = \mathbf{0}.$$

« Le gradient d'un champ est irrotationnel »

grad

$$\overrightarrow{grad}(div\ \mathbf{V}) = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}, \quad = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j}\right)\hat{\mathbf{e}}_i.$$

div *rot*

$$div(\overrightarrow{rot}\ \mathbf{V}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}, \quad = 0.$$

« La divergence d'un rotationnel est nulle »

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\ \mathbf{V}) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}.$$

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}, \quad = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2}\right)\hat{\mathbf{e}}_i.$$

Laplacien vectoriel

À partir d'une quantité scalaire, représentée par un cadre à fond blanc, l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$ (prononcer « nabla » ou « del » en anglais) ne peut s'appliquer que sous la forme d'un *gradient*. À partir d'une quantité vectorielle, représentée par un cadre à fond gris, l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$ peut s'appliquer sous deux formes : *divergence* et/ou *rotationnel*.

Produit d'un champ scalaire par un champ vectoriel : $div\ (\phi\mathbf{V}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\mathbf{V}) = \phi(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}) + \mathbf{V}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi)$ et $\overrightarrow{rot}\ (\phi\mathbf{V}) = \boldsymbol{\nabla}\times(\phi\mathbf{V}) = (\boldsymbol{\nabla}\phi)\times\mathbf{V} + \phi(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V})$.