Nantes Université
Faculté des sciences et des techniques
https://sciences-techniques.univ-nantes.fr

Sommaire

1 Calculs algébriques, chiffres, nombres et puissances **2**

2 Équation d'une droite, vecteur directeur et calcul de pente **7**

3 Moyenne, variance et écart-type **8**

4 Régression linéaire **9**

5 Fonction exponentielle **10**

6 Fonctions logarithmes **11**

7 Dérivabilité et dérivées usuelles **14**

8 Incertitudes absolues et relatives **16**

9 Intégration et primitives usuelles **18**

10 Trigonométrie **20**

(version 2.03)

1 Calculs algébriques, chiffres, nombres et puissances

1.1 Fractions

Soient deux nombres $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^\star$, la fraction, notée $\frac{a}{b}$, est le nombre résultat de la division de a par b ; a est le numérateur et b le dénominateur. **Le dénominateur ne peut pas être nul.**
Dans les équations ci-dessous, a, b, c et d sont tous réels et doivent, en plus, être différents de zéro quand ils se retrouvent au dénominateur :

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}, \quad (1)$$
$$c\frac{a}{b} = \frac{ac}{b}, \quad (2)$$
$$\frac{ca}{cb} = \frac{a}{b}, \quad (3)$$
$$\left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{bc} \quad (4)$$
$$\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ad+bc}{bd}, \quad (5)$$
$$\left(\frac{a}{b}\right) - \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ad-bc}{bd}, \quad (6)$$

$$\frac{a}{1} = a, \qquad \frac{0}{b} = 0 \quad (7)$$
$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a, \quad (8)$$
$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{a}{\frac{a}{b}} = b, \quad (9)$$
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}, \quad (10)$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc. \quad (11)$$

Attention

La somme des inverses n'est pas égale à l'inverse de la somme, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$.

$\frac{a}{a+b}$ ne peut pas vraiment se simplifier, à part écrire que $\frac{a}{a+b} = \frac{a+b-b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} - \frac{b}{a+b}$, et donc $\frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b}{a+b}$.

En revanche, $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$.

1.2 Puissances

La puissance d'un nombre est le résultat de la multiplication répétée n fois de ce nombre avec lui-même. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \quad (12)$$

Par convention : $x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^2 = x \times x$, $x^3 = x \times x \times x$, $x^4 = x \times x \times x \times x$, ...

Si x est différent de zéro, $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, ... et $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

$x^{1/2} = \sqrt{x}$, $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$, ... et $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et a, b et n des entiers relatifs,

$$x^a x^b = x^{a+b}, \quad (13)$$
$$(xy)^n = x^n y^n, \quad (14)$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \tag{15}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}, \tag{16}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}, \quad \text{attention } x^{a^b} = x^{(a^b)}. \tag{17}$$

1.2.1 Puissances de 10

Une puissance entière de 10 est appelée « exposant ».

Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole
10^1	déca	da	10^{-1}	déci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	méga	M	10^{-6}	micro	µ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	téra	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	péta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y
10^{27}	ronna	R	10^{-27}	ronto	r
10^{30}	quetta	Q	10^{-30}	quecto	q

FIGURE 1 – Liste officielle des préfixes et symboles pour désigner certaines puissances de 10 remarquables (https://www.bipm.org).

Pour les puissances positives, l'exposant n est le nombre de zéros du nombre, par exemple, $10^3 = 1000$ (trois zéros après le 1) et $30\,000 = 3\ 10^4$ (sous-entendu « 3 fois 10 à la puissance 4 » donc 3 fois 10 000).
Pour les puissances négatives, l'exposant n est également le nombre de zéros du nombre, en comptant le 0 qui est avant la virgule, par exemple, $10^{-2} = 0{,}01$ et $0{,}0005 = 0{,}5\ 10^{-3} = 5\ 10^{-4}$.

À propos de la touche `EXP` de certaines calculatrices

La touche `EXP` signifie « exposant » et non pas « exponentielle », pour éviter les confusions elle a été remplacée par la touche $\times 10^x$ dans les modèles récents de calculatrices. Si la calculatrice possède la touche `EXP`, une erreur courante pour calculer, par exemple, 4000 est de taper : `4 × 10 EXP 3`. Ceci va donner 40 000, car la touche `EXP` est un raccourci pour calculer « 10 à la puissance n ». Pour obtenir 4000 il faut donc taper soit : `4 EXP 3`, soit : `4` 10^x `3`.

1.2.2 Puissances de 2

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

L'informatique qui est basée sur le système binaire utilise toujours les puissances de deux. En particulier, 2^n donne le nombre de façons dont les bits (contraction de l'anglais *binary digit*) dans un entier binaire de longueur n peuvent être arrangés. Par exemple, un octet contient 8 bits et peut donc stocker 2^8 valeurs différentes (soit 256).

1.3 Carrés et racines carrées

Le carré est un cas particulier des puissances puisqu'il s'agit de multiplier un seule fois un nombre par lui-même. La notion de carré s'applique aux nombres, en particulier aux entiers naturels, pour lesquels le carré est figuré par une disposition en carré, au sens géométrique du terme (un carré de 2 cm de côté, par exemple). Plus généralement, le terme carré est utilisé pour les fonctions, les matrices et d'autres objets mathématiques. Cette opération apparait notamment dans les identités remarquables, elle permet de définir la fonction carré et les équations du second degré, et elle intervient dans le théorème de Pythagore. Pour tout nombre réel, le carré de ce nombre est obligatoirement positif ou nul ; ce n'est pas le cas si ce nombre est complexe.

Les carrés des premiers entiers naturels peuvent être lus dans la diagonale d'une table de multiplication :

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

La racine carrée d'un réel $x \geq 0$ est l'unique réel $y = \sqrt{x}$, tel que $y \geq 0$ et $y^2 = x$.
Pour deux nombres x, y réels positifs,

$$\sqrt{x} = x^{1/2}, \tag{18}$$

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \tag{19}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad (\text{si } y \neq 0), \tag{20}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} \quad (\text{si } x \neq 0), \quad \text{par exemple } \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(voir p.22)} \tag{21}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x, \tag{22}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|. \tag{23}$$

Attention $\sqrt{x+y}$ n'est pas égal à $\sqrt{x} + \sqrt{y}$!

1.4 Résolution d'équations

Règle fondamentale

Une équation est une phrase qui met en égalité parfaite deux grandeurs (ou deux membres), de part et d'autre du signe « = ». Cette égalité ne peut donc pas être rompue si on effectue la même opération sur les deux membres de l'équation. Reste ensuite à trouver quelles opérations faut-il faire à toute l'équation pour exprimer la variable qui nous intéresse, en fonction des autres.

Exemple 1 :

$$2x + 3y = 5, \quad \text{exprimer } x \text{ en fonction de } y. \tag{24}$$

En soustrayant les deux membres par $3y$, on obtient $2x + 3y - 3y = 5 - 3y$, soit $2x = 5 - 3y$. Reste à diviser les deux membres par 2 et finalement $x = \frac{1}{2}(5 - 3y)$.

Exemple 2 :

$$-5a + 9b^2 + 2c^2 = 6, \quad \text{exprimer } b \text{ en fonction de } a \text{ et } c. \tag{25}$$

En ajoutant $5a$ aux deux membres et en les soustrayant également par $2c^2$, on obtient

$$-5a + 9b^2 + 2c^2 + 5a - 2c^2 = 6 + 5a - 2c^2$$

soit $9b^2 = 6 + 5a - 2c^2$. Reste ensuite à diviser toute l'équation par 9 et à en prendre la racine carrée, et $b = \sqrt{\frac{1}{9}(6 + 5a - 2c^2)}$ ou, écrit autrement, $b = \frac{1}{3}\sqrt{5a - 2c^2 + 6}$.

Exemple 3 :

$$\frac{3}{x+2} = \frac{3y-7}{5}, \quad \text{exprimer } x \text{ en fonction de } y. \tag{26}$$

En prenant l'inverse de l'équation, on obtient

$$\frac{x+2}{3} = \frac{5}{3y-7}, \quad \text{puis en multipliant les deux membres par 3,} \quad x + 2 = \frac{15}{3y-7}.$$

Reste enfin à retrancher 2 pour obtenir $x = \frac{15}{3y-7} - 2$.

1.5 Identités remarquables

Second degré : soient a, b, c et d réels,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{27}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \tag{28}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2, \tag{29}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc), \tag{30}$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd). \tag{31}$$

Troisième degré : soient a et b réels,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad \text{et} \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \tag{32}$$

1.6 Inégalités

Pour tous réels a et b, si $a \leq b$ (prononcer « a est inférieur ou égal à b ») alors $(b-a)$ appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$. De même, si $a > b$ (prononcer « a est strictement supérieur à b ») alors $(b-a)$ appartient à l'intervalle $]-\infty; 0[$. Toutes les règles ci-après sont valables pour des inégalités strictes ($<$ et $>$) ou non ($\leq$ et $\geq$).

Additions et soustractions : une inégalité ne change pas de sens si un nombre est additionné ou soustrait dans les deux membres de l'inégalité. Si $a \geq b$ alors $\forall c \in \mathbb{R}$, $a + c \geq b + c$.
Si deux inégalités sont dans le même sens alors l'addition et la soustraction préservent le sens des inégalités ; si $a \geq b$ et $c \geq d$ alors $a + c \geq b + d$. Par exemple, $3 \leq 5$ et $6 \leq 10$ alors $9 \leq 15$.

Multiplications et divisions : une inégalité change de sens si les deux membres sont multipliés ou divisés par un nombre négatif. Si $a \leq b$ et c positif alors $ac \leq bc$ et, de même, $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$. En revanche, si c est **négatif** alors $ac \geq bc$.
Par exemple, $4 > 3$ et, en multipliant l'inégalité par -3, on a bien $-12 < -9$.
Si deux inégalités sont dans le même sens alors la multiplication et la division préservent le sens des inégalités ; si $a \geq b$ et $c \geq d$ alors $ac \geq bd$.

Passage à l'inverse : le passage à l'inverse renverse les inégalités entre nombres (non nuls) de même signe. Si $a > b > 0$ alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; par exemple, $3 > 2$ et donc $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

1.7 Chiffres significatifs et précision

Cette partie traite de la différence qu'il peut y avoir entre un nombre issu de calculs et la signification de ce nombre, en terme de précision expérimentale. La notion de chiffres significatifs vient avec la notion de confiance que l'on peut avoir dans une mesure et donc de l'incertitude qui y est associée (voir partie 8, p. 16).
Le nombre de chiffres significatifs indique la précision d'une mesure donnée. Il s'agit des chiffres connus avec certitude ou compris dans un intervalle d'incertitude.
Par exemple, la valeur 13 436 comporte 5 chiffres significatifs. L'incertitude est donc implicitement de l'ordre de grandeur de l'unité du premier chiffre incertain, ici le 6 (le dernier chiffre en lisant de gauche à droite). Il serait donc possible également d'écrire $13\,436 \pm 1$ car il n'y a pas meilleure précision que l'unité. Autrement dit, la valeur est connue à l'unité près. Même si mathématiquement c'est rigoureusement la même chose, il n'est donc pas possible d'écrire 13 436,00 car cela signifierait que cette valeur est connue à 10^{-2} près.

Comment traiter le cas du zéro et des décimales ?

Lorsque le zéro est le dernier chiffre (donc placé à droite), il est significatif :
- 4,700 a quatre chiffres significatifs ;
- 0,0890 a trois chiffres significatifs (les deux zéros à gauche du 8 ne comptent pas).

Le nombre de chiffres situés après le dernier 0 non significatif est le nombre de chiffres significatifs :
- 0,4 a un seul chiffre significatif ;
- 0,82 a deux chiffres significatifs ;
- 0,0072 a également deux chiffres significatifs.

Additions et soustractions : à la fin d'une addition ou d'une soustraction, le résultat ne doit pas avoir plus de décimales que le nombre qui en comporte le moins.
Bien que mathématiquement le résultat de $4{,}003 + 18{,}57 + 0{,}0032$ soit 22,5762, s'il s'agit de mesures il faudrait écrire 22,57 ou $22{,}57 \pm 0{,}01$, car le nombre 18,57 n'a que deux décimales, il limite donc la précision du total.

Multiplications et divisions : après une multiplication ou une division, le résultat ne doit pas avoir plus de chiffres significatifs que la valeur la moins précise.
Par exemple, comme le nombre 4,87 n'a que trois chiffres significatifs, le résultat de $\frac{15{,}03 \times 4{,}87}{1{,}987}$, bien qu'il comporte un très grand nombre de décimales, ne doit pas avoir plus de trois chiffres significatifs et devrait donc s'écrire 36,8.

2 Équation d'une droite, vecteur directeur et calcul de pente

Le plan xOy est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour m, p, q tous les trois réels, une droite s'écrit

$$x = q, \quad \text{si elle est parallèle à l'axe des ordonnées (c'est-à-dire « verticale ») et} \tag{33}$$

$$y = mx + p, \quad \text{pour tous les autres cas.} \tag{34}$$

Une façon de regrouper ces deux cas de figure est d'écrire que toute droite du plan se définit par

$$ax + by + c = 0, \tag{35}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. En considérant l'équation (35)

— avec la combinaison $a = 1, b = 0, c = -q$, cela revient à écrire l'éq. (33) et

— avec la combinaison $a = m, b = -1, c = p$, cela revient à écrire l'éq. (34).

Puisque les deux équations (34 et 35) définissent la même droite, et comme l'éq. (35) peut également s'écrire

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \quad \text{il en découle, par identification, que} \quad m = -\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad p = -\frac{c}{b}. \tag{36}$$

Dans le cas de l'éq. (34), puisque y est explicitement relié à x par le réel m, celui-ci est le coefficient directeur de la droite, également appelé la « pente » ou le « taux d'accroissement ». Effectivement m est bien la valeur de la dérivée de y par rapport à x (notée y') et celle-ci est évidemment constante pour tout x (la droite ne dévie jamais de sa trajectoire). Le réel p (éq. 34) est la valeur de y quand $x = 0$, ce terme est appelé « l'ordonnée à l'origine ».

Soient deux points, $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$, puisqu'ils définissent une unique droite, il existe m et p réels tels que

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + p \quad \text{et} \\ y_2 &= mx_2 + p. \end{aligned} \tag{37}$$

En faisant la différence des deux équations ci-dessus,

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \quad \text{et ainsi} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{38}$$

La pente peut donc être calculée en prenant deux points appartenant à une même droite et en calculant le rapport de la différence des ordonnées et de la différence des abscisses. Si la variable x s'incrémente de 1 (on écrit souvent $\delta x = 1$) alors y augmente de m, c'est la signification de la pente.

En utilisant l'éq. (36), cela revient à dire qu'un vecteur reliant deux points appartenant à la même droite et dont les abscisses sont distantes de 1, est

$$\vec{U} = (1, \frac{-a}{b}); \tag{39}$$

c'est un vecteur **directeur** de la droite, il y en a une infinité (tous colinéaires). Il est alors possible d'en déduire que le vecteur $\vec{V} = -b\vec{U}$ est également un vecteur directeur puisqu'il est colinéaire à $\vec{U}$, donc $\vec{V} = (-b, a)$ est vecteur directeur de la droite d'équation (35).

À retenir

Soit la droite (D), d'équation réduite, $y = mx + p$:
- la pente est constante et vaut m ;
- l'intersection de (D) avec l'axe des abscisses est $(-\frac{p}{m}, 0)$;
- l'intersection de (D) avec l'axe des ordonnées est $(0, p)$;
- un vecteur directeur est $(1, m)$.

Soit la droite (D), d'équation $ax + by + c = 0$:
- la pente est constante et vaut $-\frac{a}{b}$;
- l'intersection de (D) avec l'axe des abscisses est $(-\frac{c}{a}, 0)$;
- l'intersection de (D) avec l'axe des ordonnées est $(0, -\frac{c}{b})$;
- un vecteur directeur est $(-b, a)$.

3 Moyenne, variance et écart-type

Pour un ensemble de n valeurs x_i ; $i = 1, \ldots, n$, sont définis

1. la moyenne,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \tag{40}$$

2. la variance [1],

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2; \tag{42}$$

3. et l'écart-type

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}. \tag{43}$$

Il arrive souvent que l'indice x ne soit pas utile si l'étude ne concerne qu'un seul ensemble de valeurs, on note alors simplement σ^2 et σ, respectivement pour la variance et l'écart-type.
La loi normale fait partie des lois de probabilité les plus utilisées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires. Une loi normale est représentée par la courbe dite « de Gauss »,

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right), \tag{44}$$

où $\bar{x}$ est la moyenne des x (éq. 40) et σ l'écart-type (éq. 43).

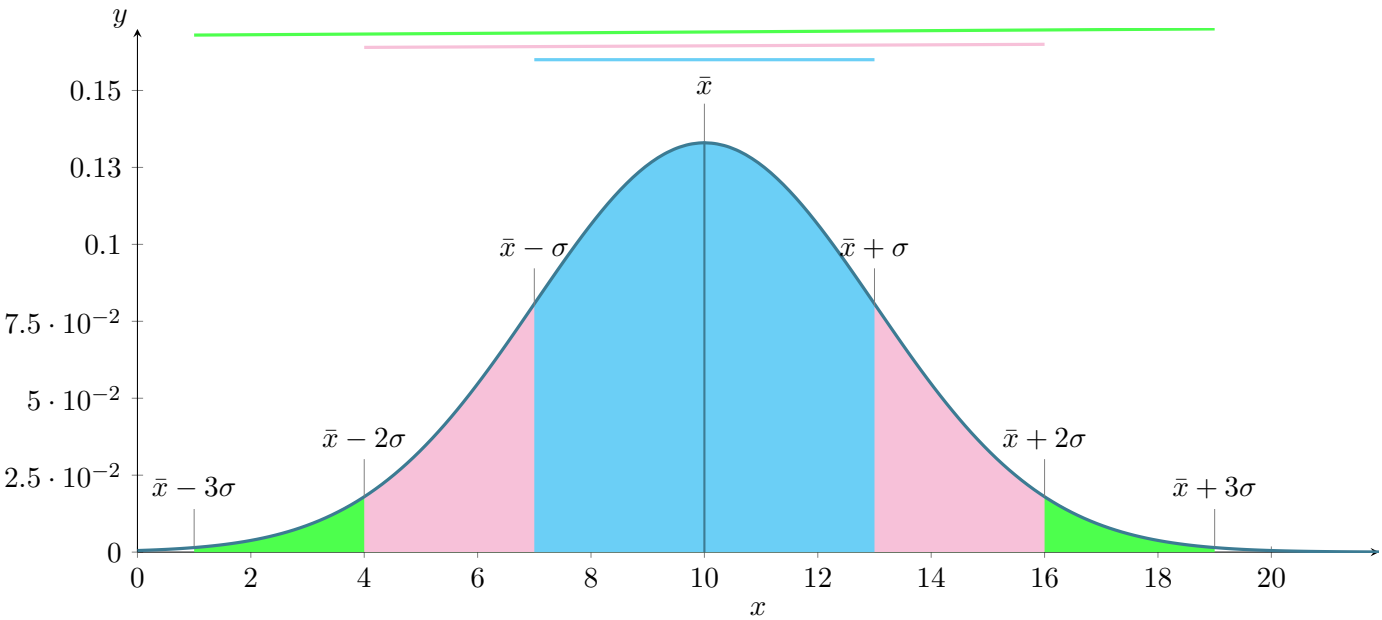


FIGURE 2 – La courbe de Gauss (ou gaussienne) est la courbe qui permet de visualiser une distribution normale, ici $\bar{x} = 10$ et $\sigma = 3$.

1. Si les échantillons étudiés ne sont qu'un sous-ensemble d'une population bien plus grande alors la normalisation dans le calcul de la variance change, et la variance dite « corrigée » en statistiques, est

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \tag{41}$$

Certains logiciels, par exemple la fonction `VAR` de Microsoft© Excel, utilisent cette normalisation. L'écart-type, quant à lui, ne change pas de définition et est toujours défini comme la racine carrée de la variance (éq. 43).

4 Régression linéaire

Pour un ensemble de n couples de valeurs $(x_i, y_i); i = 1, \ldots, n$, il est possible de chercher une loi *linéaire* (c'est-à-dire une droite) qui passe au plus près de chaque couple (x_i, y_i). Cette droite a pour équation (voir le rappel de cours n° 2)

$$y = \alpha x + \beta.$$

Grâce à la définition de la variance (partie 3, p. 8), la pente (ou coefficient de directeur) de la droite est

$$\alpha = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x^2}, \tag{45}$$

et l'ordonnée à l'origine est donc $\beta = \bar{y} - \alpha \bar{x}$.

La variance de la régression linéaire se définit grâce aux variances sur x et y,

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{n-2} \left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 - \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right] = \frac{n-1}{n-2} \left(\sigma_y^2 - \alpha^2 \sigma_x^2 \right). \tag{46}$$

Le coefficient de détermination de la droite de régression, r, également appelé coefficient de corrélation, est

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}. \tag{47}$$

Ce nombre est toujours compris entre -1 et $+1$. Il permet de savoir si les couples sont fortement corrélés linéairement de façon positive ($r \simeq 1$), ou de façon négative ($r \simeq -1$) ou bien très peu corrélés ($r \simeq 0$).

Les écart-types sur α et β sont respectivement

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{\sigma_r}{\sigma_x} \quad \text{et} \quad \sigma_\beta = \sqrt{\frac{\sigma_r^2}{n} + (\sigma_\alpha \bar{x})^2}. \tag{48}$$

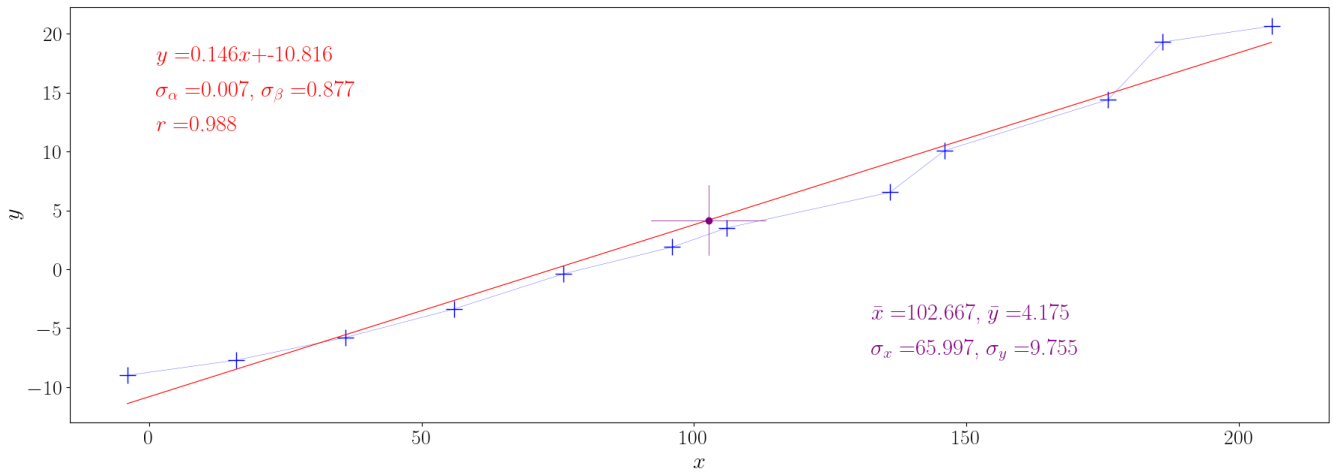


FIGURE 3 – Régression linéaire d'un ensemble de 12 couples de valeurs (x, y).

5 Fonction exponentielle

Il existe une unique fonction f dérivable et continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et qu'elle soit égale à sa dérivée, c'est-à-dire $f = f'$. Cette fonction est la fonction exponentielle (de base e) et notée « exp » ou sous une forme abrégée, « e ».

$$\text{Pour tout } x \text{ appartenant à } \mathbb{R}, \quad (\exp(x))' = \exp(x) \quad \text{ou} \quad (e^x)' = e^x. \tag{49}$$

Cette propriété est fondamentale car elle implique, par récurrence, que la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est infiniment dérivable et qu'elle sera toujours égale à sa dérivée. La fonction exponentielle est strictement positive et donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (Fig. 4). Quand x tend vers $-\infty$, $\exp(x)$ tend vers 0 (asymptote horizontale) et quand x tend vers $+\infty$, $\exp(x)$ tend également vers $+\infty$ (de façon très rapide),

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty.$$

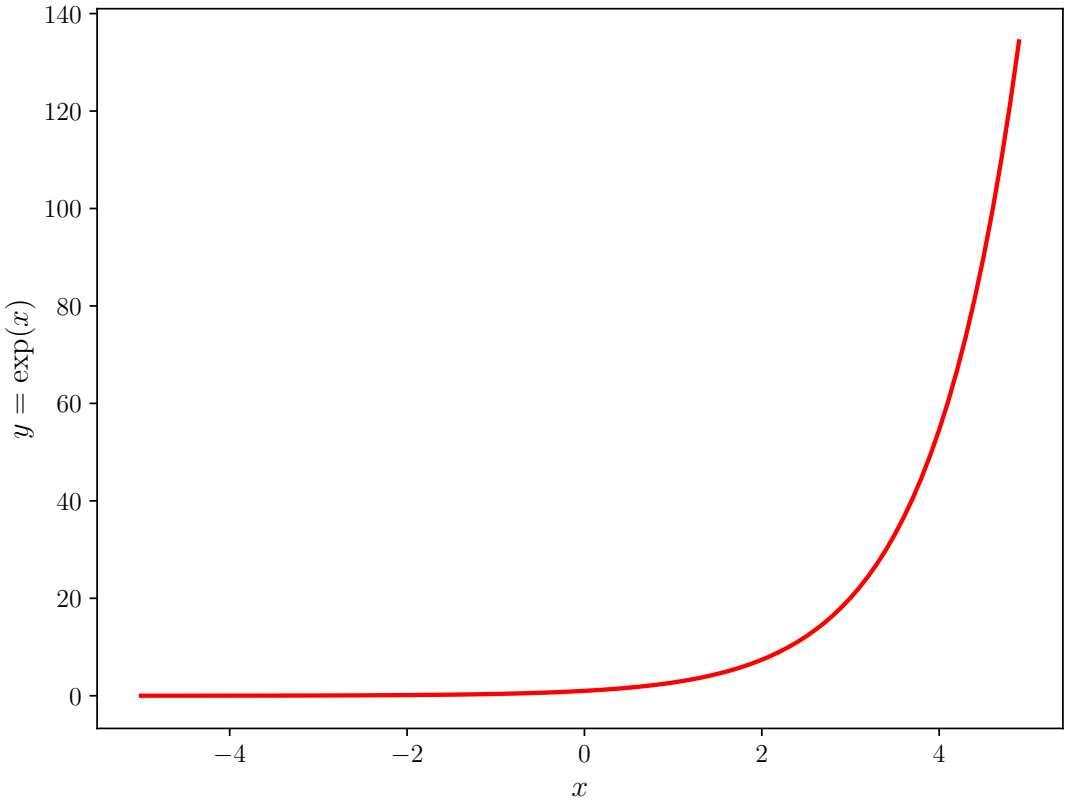


Figure 4 – Courbe représentative de la fonction exponentielle.

Par définition, $e^0 = 1$ et on $f(1)$ est noté simplement e, soit $f(1) = e^1 = e = 2.71828\ldots$, e est un nombre irrationnel.

Si u est une autre fonction de x, dérivable sur un intervalle noté I, alors la fonction $x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur I et

$$f'(x) = u'(x)\exp(u(x)). \tag{50}$$

La fonction exponentielle est la seule fonction dérivable et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ qui, prenant la valeur e en 1, transforme une somme en produit ; c'est-à-dire que

$$\text{pour } a \text{ et } b, \text{ réels quelconques, } f(a+b) = f(a)f(b). \tag{51}$$

La condition $f(1) = e$ peut se remplacer en écrivant que la dérivée prend la valeur 1 en 0.

On en déduit que si a et b sont tous les deux réels, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

6 Fonctions logarithmes

Définition : le logarithme en base b d'un nombre réel strictement positif est la puissance p à laquelle il faut élever la base b pour obtenir ce nombre.
Dans la base décimale, si on prend le nombre 100, alors $\log_{10}(100) = 2$; c'est-à-dire qu'il faut mettre 10 à la puissance 2 pour obtenir 100. Quelle que soit la base, le logarithme est toujours nul quand $x = 1$. En pratique, trois bases sont principalement utilisées : 2, e et 10.

- Le logarithme en base 2 se note $\log_2$;
- le logarithme en base e (voir la fonction exponentielle, p. 10) devrait se noter $\log_e$ mais il est quasiment tout le temps recontré comme ln et porte le nom de « logarithme népérien ».
- le logarithme en base 10 se note $\log_{10}$ et parfois tout simplement log, comme sur les calculatrices.

Tout logarithme transforme

- un produit en somme, $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$;
- un quotient en différence, $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$;
- une puissance en produit, $\log_b(x^n) = n\log_b(x)$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Comme le montre la Fig. 5, les fonctions logarithmes sont toutes croissantes avec une asymptote verticale en $x = 0$. Elles tendent toutes vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} &\text{si } \log_b(x) \leq \log_b(y) \quad \text{alors} \quad x \leq y \text{ et} \\ &\text{si } \log_b(x) > \log_b(y) \quad \text{alors} \quad x > y. \end{aligned} \tag{52}$$

Logarithme néperien

Le logarithme en base e est très utilisé car la fonction ln est la réciproque (ou l'inverse) de la fonction exp et qu'il s'agit de la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, s'annulant en 1.
Tout réel strictement positif possède un unique antécédent réel par la fonction exp, cet antécédent est noté ln et

$$\text{si } y = \exp(x) \text{ alors } x = \ln(y). \tag{53}$$

Les conséquences sont que, quel que soit x réel strictement positif,

$$\exp(\ln(x)) = x \text{ et réciproquement, pour tout } x \text{ appartenant à } \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x; \tag{54}$$

de plus $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie, dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Si u est une fonction définie, dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I, alors

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}. \tag{55}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et plus généralement} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \text{ (avec } n \in \mathbb{N}).$$

Les courbes représentatives de la fonction exp et ln sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (Fig. 6). Les autres logarithmes peuvent se définir à partir de ln car $\log_b(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)}$.

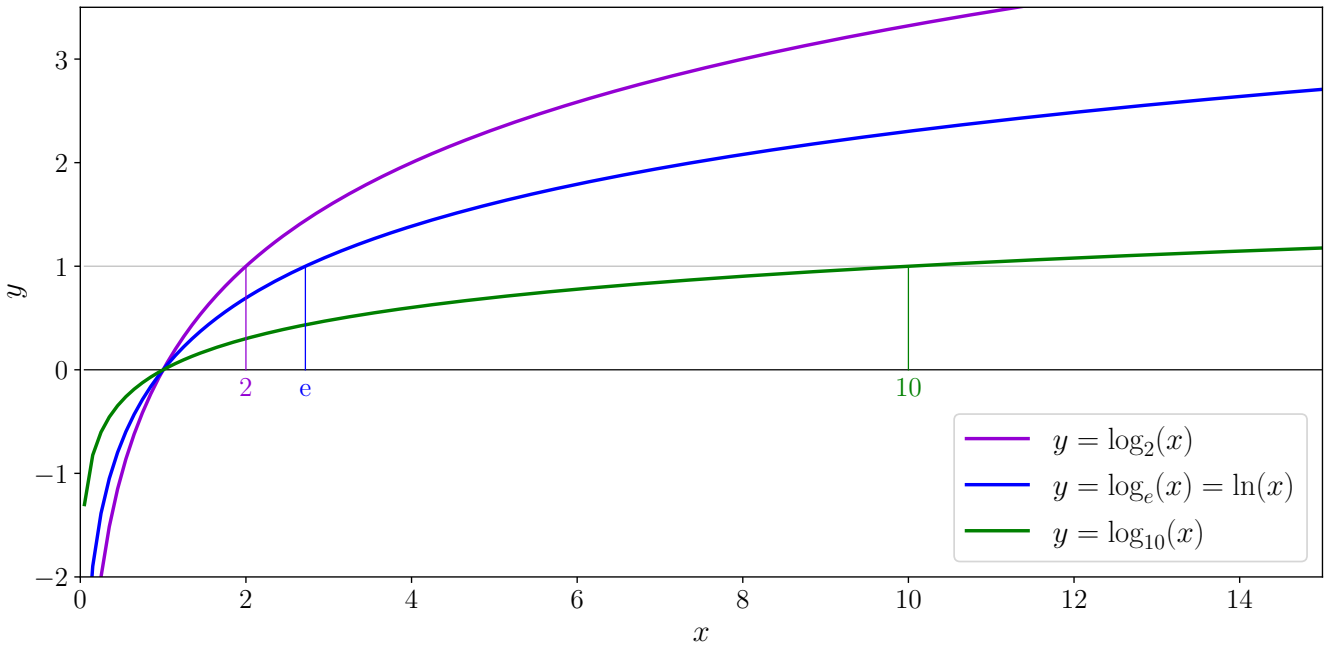


FIGURE 5 – Courbes représentatives des fonctions $\log_2$, ln et $\log_{10}$.

Pour les bases 2 et 10 :

— pour tout x réel strictement positif, $2^{\log_2 x} = x$ et $10^{\log_{10} x} = x$;
— quel que soit x appartenant à $\mathbb{R}$, $\log_2(2^x) = x$ et $\log_{10}(10^x) = x$;
— $\log_2(1) = 0$ et $\log_2(2) = 1$;
— $\log_{10}(1) = 0$ et $\log_{10}(10) = 1$.

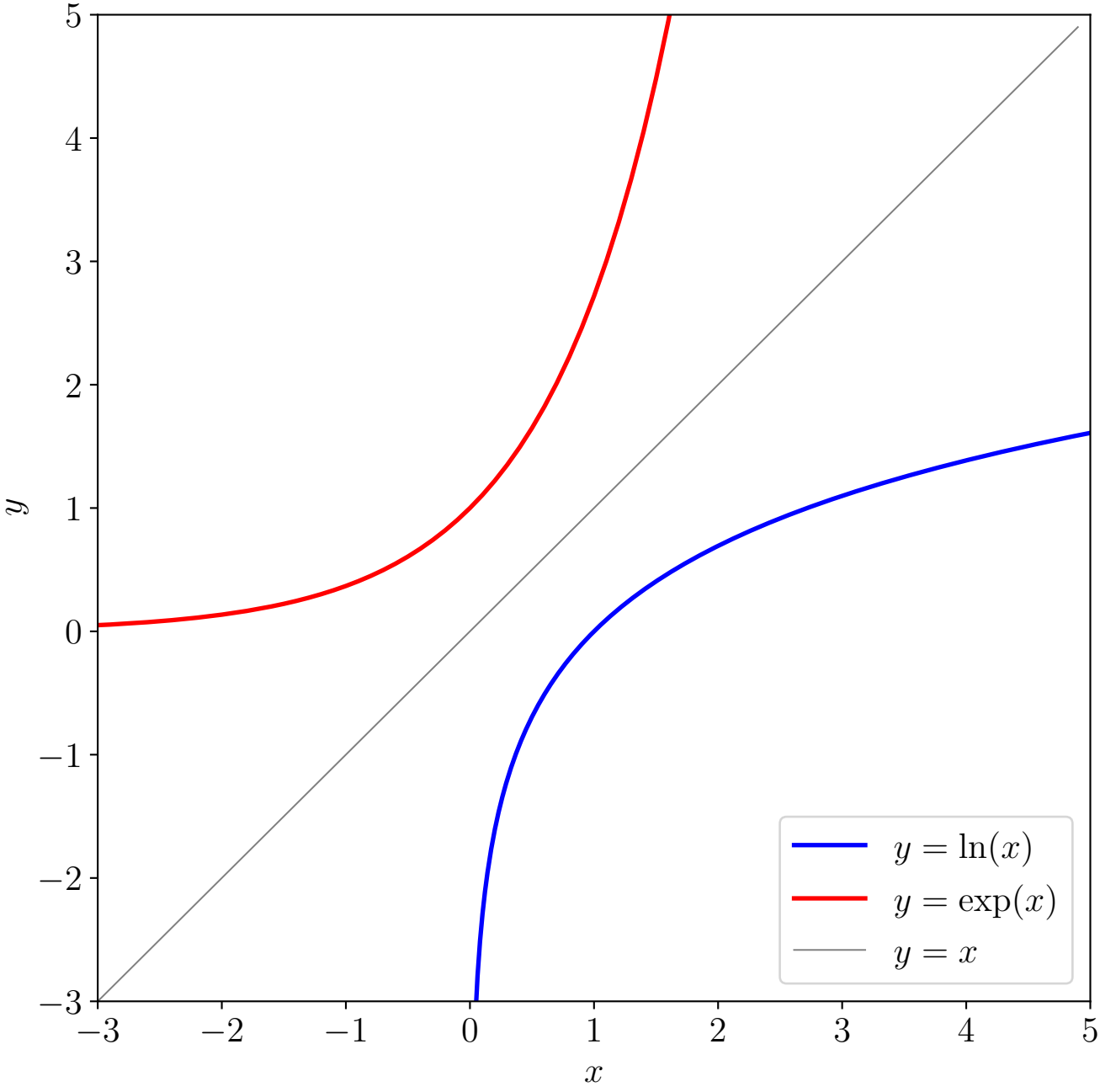


Figure 6 – Courbes représentatives des fonctions exp et ln.

7 Dérivabilité et dérivées usuelles

Dérivabilité en un point : soit f une fonction définie sur un intervalle I, contenant le réel a, et dont la courbe représentative dans un repère cartésien est notée $\mathcal{C}$. f est dérivable au point d'abscisse a si et seulement si le taux de variation en a, noté

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{56}$$

tend vers une valeur finie, notée l, lorsque h tend vers zéro ;

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l. \tag{57}$$

Cette limite l est appelée le nombre dérivé de f au point a et il est noté $f'(a)$.

En considérant deux points appartenant à $\mathcal{C}$, notés $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$:
- si $x_1 = a$ alors $y_1 = f(a)$,
- si $x_2 = a + h$ alors $y_2 = f(a + h)$
- et $x_2 - x_1 = h$.

La pente de la droite passant par M_1 et M_2 est $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ et elle est bien égale au taux de variation (éq. 56). La dérivée est donc la valeur vers laquelle tend la pente de la droite reliant deux points de $\mathcal{C}$ lorsque leurs abscisses se rapprochent l'une de l'autre, jusqu'à atteindre une différence infiniment petite (Fig. 7).

S'il est possible de calculer un nombre dérivé pour tout x appertenant à I alors il existe une fonction f' qui est la fonction dérivée de f sur I.

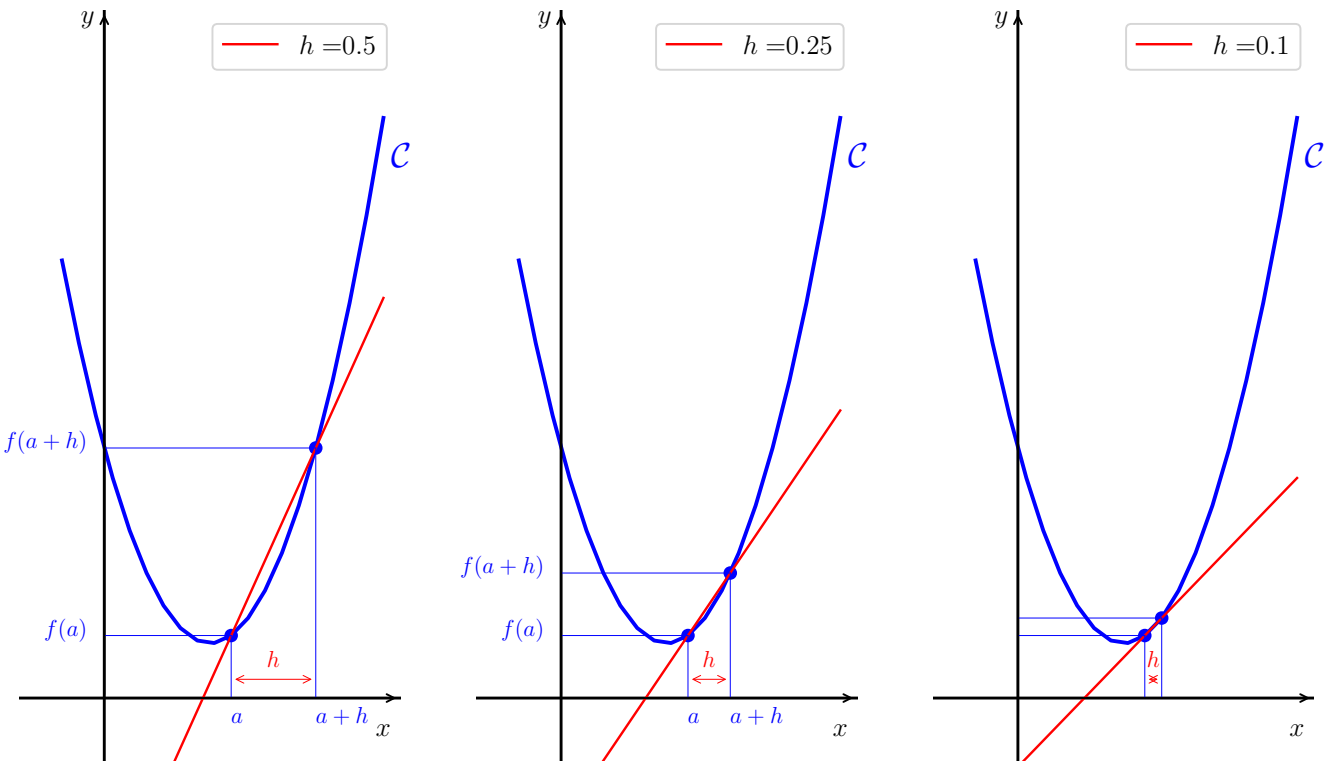


Figure 7 – Illustration de la convergence de h vers zéro. Plus h diminue, plus la droite rouge, passant par les points $(a, f(a))$ et $(a + h, f(a + h))$, tend vers la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ (bleue), au point d'abscisse a.

Dérivées usuelles

$f(x)$		$f'(x) = \dfrac{df}{dx}$	Dérivable sur
a	$(a \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
ax	$(a \in \mathbb{R})$	a	$\mathbb{R}$
x^n	$(n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$		$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$	$(n \in \mathbb{N})$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\ln\lvert x\rvert$		$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\log_a\lvert x\rvert$	$(a > 0, a \neq 1)$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$\mathbb{R}^*$
$\exp(x)$ ou e^x		$\exp(x)$ ou e^x	$\mathbb{R}$
a^x	$(a > 0)$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R}\backslash(\dfrac{\pi}{2} + n\pi)$

Une ou plusieurs variables ?

Dans le cas où f est une fonction à une seule variable, c'est-à-dire $f : x \mapsto f(x)$ alors f' se note aussi $\dfrac{df}{dx}$, la lettre « d » signifiant *différence*. La dérivée est bien la différence de deux valeurs de f divisée par la différence de deux valeurs de x, lorsque celle-ci tend vers zéro.

Si maintenant f est une fonction à, au moins, deux variables, par exemple, $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$, il faut alors préciser par rapport à quelle variable la différence de deux valeurs de $f(x, y)$ est divisée. Il est donc possible de calculer deux dérivées, notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, qui s'appellent des dérivées partielles. Le symbole ∂ se prononce « d rond ».
En pratique, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ se calcule en considérant que la variable y est constante et réciproquement pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Par exemple, si $f(x, y) = 4x - 6y + 5$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -6$.

8 Incertitudes absolues et relatives

8.1 Incertitudes absolues

L'incertitude absolue d'une grandeur g, notée $U(g)$, représente la précision avec laquelle g est connue. Elle caractérise la dispersion des valeurs mesurées ; c'est une valeur absolue qui a les mêmes dimensions physiques que la valeur mesurée. La notation usuelle est

$$g = g_0 \pm U(g), \tag{58}$$

où g_0 et $U(g)$ sont écrits avec la même précision (nombre de chiffres après la virgule). Parfois $U(g)$ est notée Δg et ainsi on écrira $g = g_0 \pm \Delta g$.
g_0 est la valeur dite « représentative ». Il s'agit souvent la moyenne si l'on suppose que les valeurs se distribuent suivant une loi normale (Fig. 2). En général, l'incertitude absolue est exprimée avec un seul chiffre significatif. La mesure est alors ensuite arrondie pour obtenir le même nombre de décimales que l'incertitude. Par exemple :

1. si une masse m de 143 g est mesurée à 1 g près, l'incertitude absolue est $U(m) = 1$ g et donc $m = 143 \pm 1$ g. Cela signifie que les valeurs mesurées sont alors comprises entre 142 et 144 g, on dit également que m a trois chiffres significatifs (voir la partie 1.7, p. 6).
2. l'incertitude absolue d'une longueur l de 3,5 cm, mesurée avec une règle dont la plus petite graduation est un millimètre, est $U(l) = 0{,}5$ mm et donc $l = 35 \pm 0{,}5$ mm.

8.2 Incertitudes relatives

L'incertitude relative est, quant à elle, le rapport de l'incertitude absolue et de la valeur représentative,

$$u(g) = \frac{U(g)}{g_0}. \tag{59}$$

Elle n'a donc pas d'unité, ni de grandeur physique, et elle est souvent exprimée en %.
Dans les deux exemples précédents : $u(m) = \dfrac{1}{143} \simeq 0{,}006\,99$ soit $0{,}699\,\%$; et $u(l) = \dfrac{0{,}5}{35} \simeq 0{,}014\,28$, soit $1{,}428\,\%$.

8.3 Opérations sur les incertitudes

Garder en tête qu'en combinant différentes incertitudes absolues, l'incertitude absolue totale est toujours plus grande que chacune des incertitudes. Soient deux mesures $x \pm U(x)$ et $y \pm U(y)$,

$$\text{si } z = x + y, \quad U(z) = U(x) + U(y); \tag{60}$$

$$\text{si } z = x - y, \quad U(z) = U(x) + U(y); \tag{61}$$

$$\text{si } z = xy, \quad U(z) = xy[u(x) + u(y)] = xy\left[\frac{U(x)}{x} + \frac{U(y)}{y}\right]; \tag{62}$$

$$\text{si } z = \frac{x}{y}, \quad U(z) = \frac{x}{y}[(u(x) + u(y)] = \frac{x}{y}\left[\frac{U(x)}{x} + \frac{U(y)}{y}\right]. \tag{63}$$

En théorie, lorsque g dépend de différentes grandeurs, notées $g_1, g_2, \ldots g_n$ (par exemple $g = g_1(g_2 + g_3)$), alors, sous certaines hypothèses (incertitudes indépendantes ou incertitudes individuelles suivant une statistique gaussienne),

$$U(g) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial g_k} U(g_k)\right)^2}. \tag{64}$$

En particulier, l'incertitude sur une grandeur somme de plusieurs autres grandeurs est la somme quadratique des erreurs individuelles, cependant la somme des erreurs est très couramment employée, comme dans l'éq. (60).

9 Intégration et primitives usuelles

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même domaine $\mathcal{D}$,

$$d(uv) = udv + vdu. \tag{65}$$

Si $u; x \mapsto u(x)$ alors la différentielle de u, $du = \dfrac{du}{dx}dx = u'dx$; de la même façon, $dv = v'dx$. L'éq. (65) devient donc

$$d(uv) = uv'dx + vu'dx, \tag{66}$$

et, en intégrant cette équation,

$$uv = \int uv'dx + \int vu'dx. \tag{67}$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression de l'intégration par parties,

$$\int uv'dx = uv - \int uv'dx, \quad \text{ou pour une intégrale définie,} \tag{68}$$

$$\int_a^b uv'dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'dx. \tag{69}$$

Primitives usuelles

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$	Intégrable sur
a	ax	$\mathbb{R}$
$x^n \qquad (n \in \mathbb{Z}, n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\ln\lvert x\rvert$	$x\ln\lvert x\rvert - x$	$\mathbb{R}^*$
$\exp(x)$ ou e^x	$\exp(x)$ ou e^x	$\mathbb{R}$
$a^x \qquad (a \geq 0, a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$	Intégrable sur
$\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \text{cotan}^2 x$	$-\text{cotan}x = -\dfrac{1}{\tan x}$	$x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$
$\text{cotan}x = \dfrac{1}{\tan x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan\dfrac{x}{2}\right\rvert$	$x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$	$]-1,+1[$
$\dfrac{1}{a^2-x^2} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x+a}{x-a}\right\rvert$	$x \neq \pm a$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1,+1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a > 0)$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]-a,+a[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$	$]1,+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+b}} \quad (b \neq 0)$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+k}\right\rvert$	$\begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } k > 0 \\ \lvert x\rvert > \sqrt{-k} & \text{si } k < 0 \end{cases}$

10 Trigonométrie

Dans un triangle rectangle (Fig. 8(a))

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \text{et} \qquad \cos B = \frac{a}{c}, \tag{70}$$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \qquad \text{et} \qquad \sin B = \frac{b}{c}, \tag{71}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \qquad \text{et} \qquad \tan B = \frac{b}{a}; \tag{72}$$

$$\text{et} \quad a^2 + b^2 = c^2. \tag{73}$$

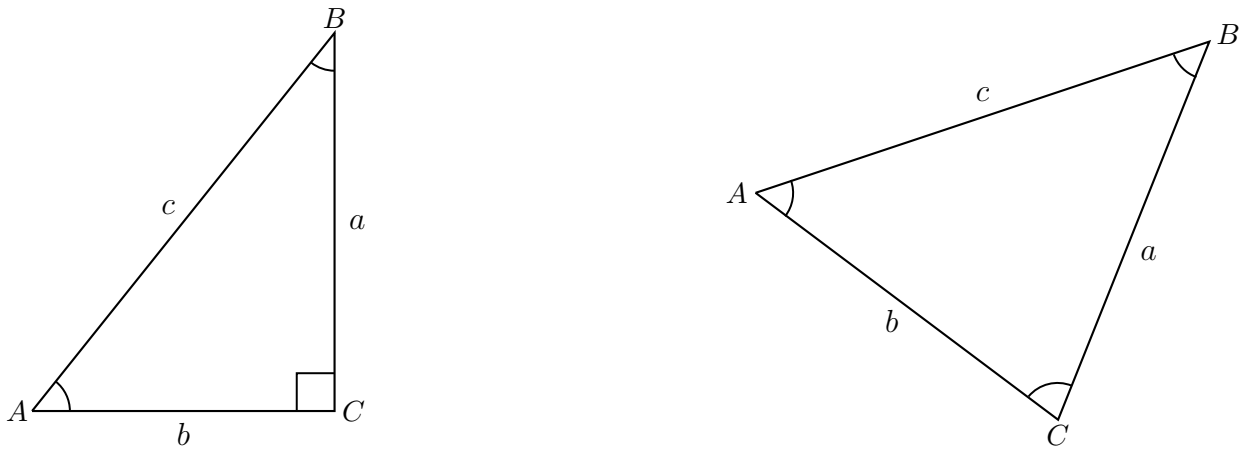
Dans un triangle quelconque (Fig. 8(b))

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \text{et} \qquad a = b\cos C + c\cos B, \tag{74}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad \text{et} \qquad b = a\cos C + c\cos A, \tag{75}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad \text{et} \qquad c = b\cos A + a\cos B; \tag{76}$$

$$\text{et} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \tag{77}$$



(a) Triangle rectangle en C.

(b) Triangle quelconque.

Figure 8 – A, B et C désignent les sommets des triangles et les angles à chaque sommet. Les lettres en minuscules a, b et c désignent les longueurs des côtés opposés aux sommets A, B et C.

Cercle trigonométrique : tout point M appartenant au cercle de rayon égal à 1, centré sur O, l'origine du repère (Fig. 9), dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé, se projette orthogonalement sur les deux axes du repère (x, y), définissant un triangle rectangle dont l'un des sommets passe par O. Ainsi, si α est l'angle entre l'axe des abscisses et la droite (OM),

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \text{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{78}$$

Si α parcourt le cercle trigonométrique, les courbes représentatives des fonctions $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ se déduisent l'une de l'autre par une translation de $\frac{\pi}{2}$ (ou déphasage). Les valeurs de sinus et cosinus sont toujours comprises entre -1 et $+1$ (Fig. 10).

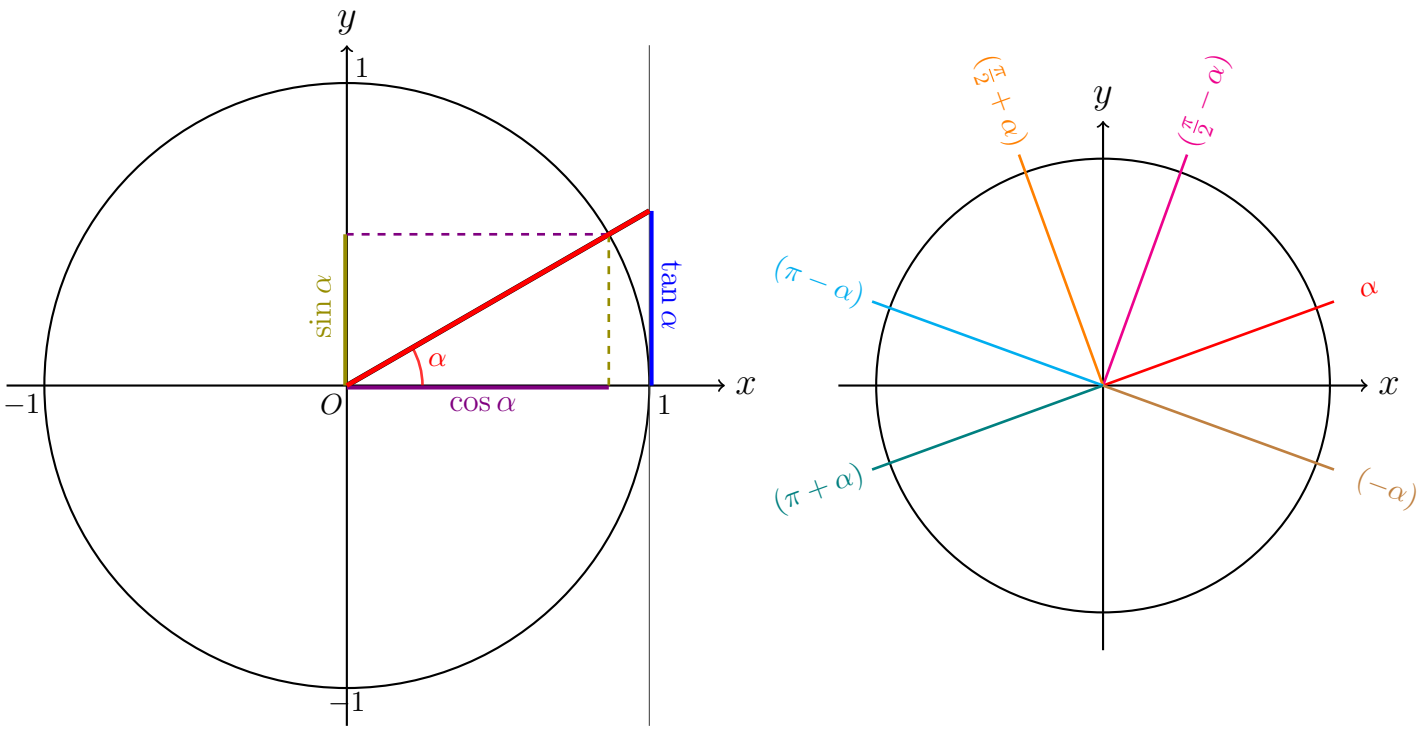


FIGURE 9 – (à gauche) Le cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1, centré en O. Les valeurs du cosinus et du sinus de l'angle α sont données par les projections orthogonales respectivement sur les axes x et y (lignes tiretées verte et violette). La tangente de l'angle α est donnée par l'intersection entre la droite rouge et l'axe vertical passant par le point d'abscisse $x = 1$.
(à droite) Pour un angle α quelconque en rouge, sont représentés les angles caractéristiques $-\alpha$ (marron), $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ (magenta et orange) et $\pi \pm \alpha$ (cyan et glaz).

Propriétés : en s'appuyant sur la FIG. 9, quel que soit α appartenant à $\mathbb{R}$,

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$,	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$,	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$,	$\mathrm{cotan}(-\alpha) = -\mathrm{cotan}(\alpha)$,
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$,	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$,	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$,	$\mathrm{cotan}(\pi - \alpha) = -\mathrm{cotan}(\alpha)$,
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$,	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$,	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$,	$\mathrm{cotan}(\pi + \alpha) = \mathrm{cotan}(\alpha)$,
$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$,	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$,	$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{cotan}(\alpha)$,	$\mathrm{cotan}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan(\alpha)$,
$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin(\alpha)$,	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos(\alpha)$,	$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{cotan}(\alpha)$,	$\mathrm{cotan}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan(\alpha)$.

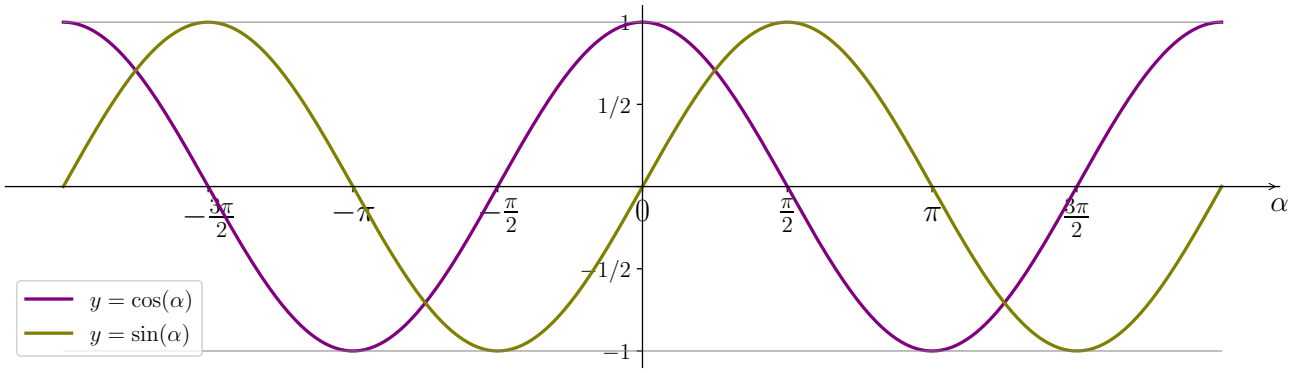


FIGURE 10 – Courbes représentatives des fonctions sinus (verte) et cosinus (violette).

α (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
α (deg)	$0\,^\circ$	$30\,^\circ$	$45\,^\circ$	$60\,^\circ$	$90\,^\circ$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Tableau 1 – Valeurs de sinus, cosinus et tangentes pour quelques valeurs particulières de l'angle α (qu'il soit en radians ou en degrés).

Résolutions d'équations trigonométriques : en s'appuyant sur la Fig. 9, quels que soient x et α réels et pour tout k appartenant à $\mathbb{Z}$,

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}, \qquad \cos x = -\cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi - \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \alpha - \pi + 2k\pi \end{cases},$$

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}, \qquad \sin x = -\sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + \alpha + 2k\pi \end{cases},$$

$$\cos x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, \qquad \cos x = -\sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases},$$

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \qquad \tan x = -\tan\alpha \Leftrightarrow x = -\alpha + k\pi.$$

Additions : quels que soient a et b réels, sauf pour $\tan(a-b)$ et $\tan(a+b)$, où a et b doivent être différents de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (k appartenant à $\mathbb{Z}$),

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b, \qquad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a, \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a,$$

$$\cos a + \sin a = \sqrt{2}\cos\left(a - \tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(a + \tfrac{\pi}{4}\right), \qquad \cos a - \sin a = \sqrt{2}\cos\left(a + \tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\tfrac{\pi}{4} - a\right),$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}, \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}.$$

Multiplications : quels que soient a et b réels,

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a, \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a, \quad \cos 2a = 2\cos^2 a - 1, \quad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a.$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}, \quad \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a, \quad \cos 3a = -3\cos a + 4\cos^3 a.$$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$, $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$,

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$,

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right), \quad \sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right), \quad \cos a - \cos b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Relations en fonction de la moitié de l'angle

Pour tout a appartenant à $\mathbb{R}$,

$$\cos a = 2\cos^2\left(\tfrac{a}{2}\right) - 1, \quad \cos a = 1 - 2\sin^2\left(\tfrac{a}{2}\right), \quad \cos a = \frac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}, \quad \sin a = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)},$$

$$\tan a = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Radians, degrés, tours ou grades, comment choisir ?

Pour exprimer des valeurs d'angle, il existe

- les radians : l'unité officielle du système international, notée « rad », bien que très souvent oubliée, par exemple, $\alpha = \frac{\pi}{8}$;
- les degrés : unité pratique, notée « ° », on parle parfois de degrés sexagésimaux (base 60), la Terre tourne d'environ 1 ° autour du Soleil chaque jour ;
- les tours : unité pratique, notée « tr », utilisée pour certaines grandeurs physiques comme, par exemple, les vitesses de rotation (« un moteur tourne à 100 tr/min ») ;
- les grades : unité légale en France pour les mesures topographiques et géodésiques, notée « gon ».

Et

$$2\pi \text{ rad} = 360\,^\circ = 1 \text{ tr} = 400 \text{ gon}. \tag{79}$$

Chacune de ces unités a des avantages et des inconvénients en fonction des usages. Par exemple, un angle droit vaut 100 gon ce qui est plus pratique pour extraire des fractions angulaires.

Quelle que soit l'unité utilisée, les angles n'ont **pas de dimension physique**, ce qui peut parfois induire des erreurs dans le dimensionnement des équations. Par exemple, la longueur du chemin parcouru le long d'un cercle de rayon r, en faisant un angle α, est $l = r\alpha$, avec α en radians. Comme $\alpha = \dfrac{l}{r}$, c'est le rapport de deux longueurs et c'est donc bien un nombre sans dimension physique.

En pratique, la principale source d'erreurs lorsqu'il faut calculer des valeurs de sinus, cosinus ou tangente vient d'une configuration par défaut des outils utilisés. C'est pour cela qu'il est très utile d'avoir en tête quelques valeurs particulières comme, par exemple, pour $\pi/4$ (Tab. 1).

Une calculatrice est très souvent configurée en degrés, ce qui signifie qu'il faut taper "`sin 45`" pour obtenir $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}707$. En revanche, puisque $\pi/4 \simeq 0{,}7854$ rad, si on tape "`sin` 0,7854" le résultat est alors faux.

A contrario, si maintenant il s'agit d'un langage comme Python ou un logiciel comme LibreOffice ou Microsof© Excel, l'angle doit être exprimé en radians et il faudra alors taper "`sin` 0,7854" pour obtenir 0,707..., comme attendu. Évidemment, si on veut tout de même exprimer l'angle avec une autre unité, par exemple en °, il est possible de faire la conversion dans la même opération que le calcul du sinus et taper "`sin(45*3.14159/180)`".

Conclusion : il faut toujours regarder dans le détail comment fonctionnent les outils que l'on doit utiliser.