Nantes Université

Département des sciences de la Terre et de l'univers
http://www.univ-nantes.fr/sciences/dptstu

En algèbre linéaire, une matrice carrée A à coefficients complexes est dite unitaire si elle vérifie

$$A^\star A = AA^\star = I, \tag{1}$$

où la matrice adjointe de A est notée $A^\star$ et I désigne la matrice identité. L'ensemble des matrices unitaires de taille n forme le groupe unitaire $A(n)$.

Les matrices unitaires dont les coefficients sont réels sont des matrices orthogonales.

1 Propriétés

Toute matrice unitaire A vérifie les propriétés suivantes :

1. le déterminant de A est de module 1 ;
2. ses vecteurs propres sont orthogonaux ;
3. A est diagonalisable,
$$A = VA'V^\star \tag{2}$$
où V est une matrice unitaire et A' une matrice diagonale **et** unitaire.
4. A peut s'écrire sous la forme d'une exponentielle d'une matrice,
$$A = \exp(\imath H), \tag{3}$$
où $\imath$ est l'unité imaginaire et H est une matrice hermitienne (note **??**)

2 Propositions équivalentes

Soit A une matrice carrée de taille n ; les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est unitaire ;
2. $A^\star$ est unitaire ;
3. A est inversible et son inverse est $A^\star$;
4. les colonnes de A forment une base orthonormale pour le produit hermitien canonique sur $\mathbb{C}_n$;
5. A est normale et ses valeurs propres sont de module 1.